TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

Kỷ yếu

HỘI THẢO KHOA HỌC

Kỷ niệm Ngày truyền thống

08/05/2006 - 08/05/2015

THÁI NGUYÊN - 05/2015

MỤC LỤC TRANG

1. Ôn Ngũ Minh ---------- 1
MỘT SỐ ĐỀ XUẤT TRONG BIÊN SOẠN HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 1

2. Đinh Cảnh Nhạc ---------- 5
VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP NEO KIẾN THỨC BẰNG CÂU ĐỐ TRONG GIẢNG DẠY

3. Phạm Thị Thu Hằng ---------- 9
MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍNH TỔNG CỦA CHUỖI SỐ

4. Ôn Ngũ Minh ---------- 12
MỘT SỐ ĐỀ XUẤT TRONG GIẢNG DẠY HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 1

5. Nguyễn Thị Xuân Mai ---------- 17
MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH THỨC

6. Hoàng Thanh Nga ---------- 20
PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TÍNH GIÁ TRỊ CÁC ĐẠI LƯỢNG BIẾN THIÊN KHÔNG ĐỀU

7. Phạm Thị Minh Hạnh ---------- 22
MỘT SỐ VÍ DỤ ÁP DỤNG TÍCH PHÂN GIẢI BÀI TOÁN VẬT LÝ

8. Nguyễn Thị Huệ ---------- 26
ỨNG DỤNG CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRONG VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

9. Nguyễn Thị Minh Ngọc ---------- 29
MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ ỨNG DỤNG MA TRẬN ĐỂ XÉT TÍNH ỔN ĐỊNH TRONG DẠY TOÁN CAO CẤP

10. Phan Thị Vân Huyền ---------- 34
MỘT SỐ CÁCH BIỂU DIỄN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

11. Vũ Hồng Quân ---------- 39
TRỊ RIÊNG-VECTO RIÊNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

12. Ngô Văn Giang ---------- 42
MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC

13. Nguyễn Thị Phương ---------- 45
NGHIÊN CỨU VỀ MÔ HÌNH TOÁN HỌC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG MẶT PHẲNG

14. Phạm Thị Thu ---------- 50
MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM TRONG CUỘC SỐNG

15. Đồng Thị Linh ---------- 53
ÁNH SÁNH – SÓNG HAY HẠT

16. Hoàng Mạnh Chung ---------- 58
SỬ DỤNG PHẦN MỀM THÍ NGHIỆM ẢO TRONG GIẢNG DẠY VẬT LÝ

17. Nguyễn Thị Thu Hoàn ---------- 61
VÉC TƠ PHÂN CỰC CỦA CÁC NƠTRON TÁN XẠ TRÊN BỀ MẶT TINH THỂ PHÂN CỰC TRONG ĐIỀU KIỆN CÓ PHẢN XẠ TOÀN PHẦN

18. Đan Thành Vinh ---------- 66
XÁC ĐỊNH TEST KIỂM TRA SỨC MẠNH CHO VẬN ĐỘNG VIÊN NAM CÂU LẠC BỘ BÓNG ĐÁ SINH VIÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

19. Lưu Thanh Nga ---------- 70
ĐÁNH GIÁ THỰC TRẠNG THỂ LỰC VÀ LỰA CHỌN GIẢI PHÁP NHẰM NÂNG CAO TỐ CHẤT THỂ LỰC CHO SINH VIÊN K50 TRƯỜNG ĐẠI HỌC KTCN

20. Lê Bích Ngọc ---------- 76
CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN

21. Nguyễn Thanh Tùng ---------- 80
ẢNH HƯỞNG CỦA CHIỀU DÀY LỚP VỎ LÊN TÍNH CHẤT QUANG CỦA CÁC CHẤM LƯỢNG TỬ CdSe/ZnS CẤU TRÚC LÕI VỎ

MỘT SỐ ĐỀ XUẤT TRONG BIÊN SOẠN HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 1

Ôn Ngũ Minh

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Giải tích 1 hay *Phép tính giải tích hàm một biến số thực* là học phần bắt buộc trong khung chương trình của tất cả các ngành trong Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, và cũng là học phần bắt buộc đối với tất cả các ngành thuộc nhóm ngành kỹ thuật trong các trường đại học trong nước cũng như ngoài nước.

Thông qua việc biên soạn bài giảng từ các tài liệu tiếng Anh, mà cơ bản là dựa vào cuốn *Single Variable Calculus 7th editions*[1] của James Stewart, chúng tôi đưa ra một số nhận xét cùng một số đề xuất khi biên soạn bài giảng nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy học phần này.

Từ khóa Giới hạn, sự liên tục, đạo hàm, tích phân, chuỗi Fuarier.

NỘI DUNG

1.1 Thực trạng

Ở Việt Nam, ngoài cuốn giáo trình đã được Bộ GD&ĐT phê duyệt[3], hầu hết các trường đại học đều tự biên soạn riêng cho mình một cuốn giáo trình khác, và Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp cũng không là ngoại lệ[4].

Chịu nhiều ảnh hưởng của những cuốn giáo trình được in tại Nhà xuất bản Giáo dục, tuy không giống nhau hoàn toàn, nhưng cấu trúc về chương mục của các giáo trình này nói chung là giống nhau. Về cơ bản gồm các chương như sau:

1. Số thực và hàm một biến số thực
2. Giới hạn và sự liên tục của hàm một biến
3. Đạo hàm và vi phân
4. Tích phân bất định
5. Tích phân xác định và ứng dụng
6. Chuỗi

Hiện nay, nhiều trường đại học trên thế giới sử dụng cuốn sách "*Single Variable Calculus 7th editions*" của tác giả James Stewart, có cấu trúc các chương như sau:

1. Functions and Models
2. Limits and Derivatives
3. Differentiation Rules
4. Applications of Differentiation
5. Integrals
6. Applications of Integration
7. Techniques of Integration
8. Further Applications of Integration
9. Differential Equations
10. Parametric Equations and Polar Coordinates
11. Infinite Sequences and Series

Chúng ta không bàn về số chương, mà bàn về cấu trúc của chúng. Chương đầu tiên, *Functions and Models*, tác giả đã đề cập đến bốn cách biểu thị hàm số là

- *verbally (by a description in words)*
- *numerically (by a table of values)*
- *visually (by a graph)*
- *algebraically (by an explicit formula)*

Tác giả chỉ ra rằng cả bốn cách biểu diễn hàm số đó đều có ứng dụng thực tế, trong khi đó các sách của ta chỉ chú trọng đến cách thứ tư là "*algebraically*".

Trong chương 2, *Limits and Derivatives*, nội dung không có gì khác biệt lắm so với sách của ta, ngoại trừ việc làm rõ hơn ý nghĩa của đạo hàm và có một đồ án dành cho sinh viên. Theo đó, sinh viên cần phải tìm đọc bốn tài liệu tham khảo được chỉ ra để từ đó viết một bài luận so sánh hai cách tìm tiếp tuyến của Pierre Fermat (1601–1665) với Isaac Barrow (1630 –1677). Đây là hai nhà toán

học có ảnh hưởng lớn và trực tiếp đến Isaac Newton (1642 – 1727) trong việc ông khởi xướng các khái niệm giới hạn và đạo hàm (1660).

Trong chương 3, *Differentiation Rules*, sinh viên phải thực hiện ba đồ án, một đồ án ứng dụng và hai đồ án tại phòng thí nghiệm. Với đồ án ứng dụng, sinh viên phải tính toán và vẽ ra quỹ đạo hạ cánh của một chiếc máy bay với những ràng buộc cho trước.

Trong chương 4, *Applications of Differentiation*, sinh viên phải hoàn thành hai đồ án ứng dụng. Một đồ án là sử dụng những ý tưởng của Descartes và Newton để giải thích các hình dạng, vị trí và màu sắc của cầu vồng. Đồ án kia là bài toán kinh tế, liên quan đến hình dáng cái lon khi chúng được xếp vào trong một cái thùng dạng khối hộp chữ nhật.

Ngoài ra, chương này còn trình bày phương pháp Newton để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x) = 0$. Ở Việt Nam thì phần này được trình bày trong học phần Phương pháp tính hoặc học phần Toán ứng dụng.

Từ chương 5 đến chương 8 (*Integrals, Applications of Integration, Techniques of Integration, Further Applications of Integration*) trình bày các vấn đề liên quan đến tích phân bất định và tích phân xác định cùng với các ứng dụng của tích phân. Cấu trúc cũng như nội dung có nhiều điểm khác biệt so với sách của chúng ta.

Chương 5, *Integrals*, bao gồm các mục:

5.1 Areas and Distances

5.2 The Definite Integral

5.3 The Fundamental Theorem of Calculus

5.4 Indefinite Integrals and the Net Change Theorem

5.5 The Substitution Rule

Tích phân xác định được trình bày trước tích phân bất định, trong khi sách của ta thì ngược lại. Dùng bài toán tính diện tích hình phẳng để đưa ra khái niệm tích phân xác định là cách làm truyền thống. Tuy nhiên, điểm khác ở đây là các điểm chia x_k cách đều và điểm x_k^* không cần chọn ngẫu nhiên mà có thể trùng với hoặc mút trái x_{k-1}, hoặc mút phải x_k, hoặc trung điểm $\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$. Việc định nghĩa như thế vừa đảm bảo tính đúng đắn của lý thuyết, vừa dễ thực hành tính tích phân của một số hàm cơ bản:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x$$

Việc đưa ra phương pháp *Trung điểm* (Midpoint) để tính gần đúng tích phân xác định tại thời điểm này là hoàn toàn phù hợp với chương trình thuộc nhóm ngành kỹ thuật. Phương pháp này có ưu điểm là dễ thực hiện trên máy tính vì tính lập trình được (programmable).

Để tính đúng tích phân xác định bằng định nghĩa nói chung là rất khó. Vì vậy chúng ta cần một công cụ khác hiệu quả hơn, đó là sử dụng Định lý cơ bản của giải tích:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Vì vậy, tích phân bất định cần được đưa ra tại thời điểm này kèm theo bảng các nguyên hàm của các hàm sơ cấp cơ bản. Việc kiểm chứng các công thức đó rất đơn giản nhờ phép tính đạo hàm.

Nhìn chung $\int f(x)dx$ không thuộc một trong các dạng đã biết của bảng, mà cần phải qua một hoặc nhiều lần đổi biến. Vì vậy phương pháp đổi biến được đề cập ở đây.

Chương 6, *Applications of Integration*, trình bày bốn bài toán có thể sử dụng tích phân xác định là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường cong (*Areas Between Curves*), thể tích của ống hình trụ (*Volumes by Cylindrical Shells*), công (*Work*) và giá trị trung bình của hàm số (*Average Value of a Function*).

Các ứng dụng của tích phân xác định còn được trình bày trong chương 8, "*Further Applications of Integration*", bao gồm bài toán tính độ dài cung phẳng (*Arc Length*), diện tích mặt tròn xoay (*Area of a Surface of Revolution*), các ứng dụng trong vật lý và kỹ thuật (*Applications to Physics and Engineering*), ứng dụng trong kinh tế và sinh học (*Applications to Economics and Biology*), và cả trong xác suất (*Probability*).

Chương 7, *Techniques of Integration*, trình bày các kỹ thuật tính tích phân, bao gồm phương pháp tích phân từng phần (*Integration by Parts*), tích phân các biểu thức lượng giác (*Trigonometric Integrals*), các phép đổi biến lượng giác (*Trigonometric Substitution*), tích phân các phân thức hữu tỷ (*Integration of Rational Functions by Partial Fractions*), chiến lược tính tích phân (*Strategy for Integration*).

Đặc biệt, trong chương này còn trình bày phương pháp Simson để tích gần đúng tích phân xác định. Ở trường ta, phương pháp này đã được trình bày trong học phần *Toán ứng dụng* (Toán 4), nhưng nay đã bị bỏ đi không rõ lý do, trong khi đó, tất cả các trường đại học thuộc khối kỹ thuật đều giảng dạy phần này.

Tích phân suy rộng (*Improper Integrals*) được trình bày vào cuối chương này.

Chương 9, *Differential Equations*, trình bày về phương trình vi phân cấp một. Ở ta, phần này là một phần của chương cuối học phần Giải tích 2 (*Phép toán giải tích hàm nhiều biến số*). Trong chương này tác giả đã chỉ ra một số vấn đề trong thực tế có thể được mô hình hóa bằng một hoặc hai phương trình vi phân cấp một, đó là bài toán về sự tăng trưởng dân số, bài toán về sự đàn hồi của lò xo, bài toán về dòng điện trong mạch vi phân. Và như một sự tất yếu, có cả phương pháp Euler tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp một bằng phương pháp số.

Theo tôi, không nhất thiết có chương này trong học phần này vì nó liên quan đến hàm nhiều biến số, mặc dù tác giả đã rất khôn khéo trong cách trình bày để tránh đề cập đến nó.

Chương 10, *Parametric Equations and Polar Coordinates*, trình bày về phương trình tham số và tọa độ cực cùng với các bài toán về tính diện tích hình phẳng và tính độ dài đường cong phẳng. Theo tôi, chúng ta có thể vẫn giữ cách trình bày truyền thống, tức là nằm trong Chương 3, phần khảo sát hàm số.

Chương 11, *Infinite Sequences and Series*, tác giả trình bày dãy số và chuỗi. Kiến thức không có gì đặc biệt và không có phần chuỗi Fuarier, nhưng lại có chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin, phần này chúng ta trình bày trong Chương 3 phần ứng dụng của đạo hàm cấp cao.

1.2 Đề xuất

So sánh cấu trúc và nội dung các tài liệu tham khảo, tác giả xin đề xuất một số điểm sau khi biên soạn tài liệu học phần Giải tích.

Chương 1 là *Hàm một biến số thực*. Các mục giống như các tài liệu [3] hoặc [4], nhưng bổ sung thêm mục *Các cách cho hàm số* (tham khảo mục *1.1 Four Ways to Represent a Function*) và mục *Sử dụng máy tính để vẽ đồ thị hàm số* (tham khảo mục *1.4 Graphing Calculators and Computers*).

Chương 2 là *Giới hạn và sự liên tục*. Các mục giống như các tài liệu [3] hoặc [4], tham khảo kiến thức của chương *Limits and Derivatives* trong tài liệu [1].

Chương 3 là *Đạo hàm và vi phân*. Các mục giống như các tài liệu [3] hoặc [4] nhưng bỏ đi phần *Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurrin*. Tham khảo kiến thức của chương *Limits and Derivatives*, chương *Differentiation Rules*, chương *Applications of Differentiation* trong tài liệu [1]. Phần khảo sát hàm số nên tham khảo

chương 10 *Parametric Equations and Polar Coordinates* của tài liệu [1].

Chương 4 là *Tích phân*. Các mục giống như chương 5 *Integrals* của tài liệu [1].

Chương 5 là *Ứng dụng của tích phân xác định*. Bao gồm các mục của chương 6 *Applications of Integration* và chương 8 *Further Applications of Integration* trong tài liệu [1], nhưng bổ sung thêm trường hợp các đường cong được cho bởi phương trình tham số hoặc cho trong tọa độ cực.

Chương 6 là *Kỹ thuật tính tích phân*. Các mục giống như chương 7 "*Techniques of Integration*" của tài liệu [1].

Chương 7 là *Chuỗi*. Các mục giống như tài liệu [4], tham khảo nội dung của chương 11 *Infinite Sequences and Series* trong tài liệu [1].

Chương 8 là *Một số bài toán giải bằng phương pháp số*. Chương này rất quan trọng đối với nhóm ngành kỹ thuật, đặc biệt là các mục sau:

1. Tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình $f(x) = 0$
2. Tính gần đúng đạo hàm
3. Tính gần đúng tích phân
4. Giải gần đúng phương trình vi phân

Tài liệu [2] sẽ là tài liệu tham khảo chính, ngoài ra cần tham khảo thêm các mục "*4.8 Newton's Method*", "*7.7 Approximate Integration*" và "*9.2 Direction Fields and Euler's Method*".

KẾT LUẬN

Qua so sánh các tài liệu trên, chúng ta thấy rằng về mặt kiến thức thì có thể xem là như nhau, nhưng khác nhau ở cấu trúc các chương mục. Tài liệu tiếng Việt của ta rất nghèo ví dụ thực tế, trong khi tài liệu tiếng Anh rất coi trọng và phong phú. Mỗi chương đều có các project như là các bài tập lớn. Một điểm nữa là trong tài liệu tiếng Anh, có thể các ràng buộc trong các phát biểu có thể được xem nhẹ, thậm chí bỏ qua. Nhưng có một điều cần học tập ở họ, đó là việc sử dụng máy tính và công nghệ thông tin trong việc trình bày cũng như trong các tính toán. Để nâng cao chất lượng giảng dạy và phù hợp với chương trình nhóm ngành kỹ thuật, chúng ta nên tham khảo tài liệu tiếng Anh trong khi biên soạn bài giảng hay giáo trình.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] James Stewart, *Single variable calculus Early Transcendentals* 7th edition, 2010.

[2] Laurene V. *Applied numerical analysis using MATLAB*, Fausett Univesity of South Carolina Aiken, 1999.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, Tập 2 – Phép tính Giải tích một biến số,* NXB Giáo dục, 2004.

[4] Ôn Ngũ Minh, *Toán học cao cấp – Phép tính giải tích một biến số*, nxb KH&KT, 2010.

SOME SUGGESTIONS FOR COMPILAING MODULE CALCULUS 1

On Ngu Minh

Department of Mathematics, Faculty of General Sciences, Thai Nguyen University of Technology

SUMMARY

Calculus 1 or *Single Variable Calculus* is a compulsory subject in the curriculum of all disciplines at Thai Nguyen University of Technology, and also the compulsory subject in technology curricula at universities in Vietnam and all over the world.

Through compilating lectures based on English documents, especially based on the book *Single Variable Calculus 7th editions* [1] of James Stewart, in this paper we give some comments and some suggestions for preparing *Calculus 1* lectures to enhance the quality of teaching this module.

Keywords Limits, continuity, Derivatives, integrals, Fuarier series.

THAM LUẬN HỘI THẢO CẤP TRƯỜNG, NĂM 2015
"VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP NEO KIẾN THỨC BẰNG CÂU ĐỐ TRONG GIẢNG DẠY"

TS.Đinh Cảnh Nhạc

(Khoa Khoa học cơ bản - Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên)

TÓM TẮT

Dạy tốt, hiệu quả cao là ước mơ của tất cả những người làm thầy giáo. Muốn dạy tốt thì người thầy không chỉ có kiến thức sâu rộng và lòng yêu nghề mà còn phải có những phương pháp phù hợp với môn học và từng bài học. Kết hợp nhuần nhuyễn giữa phương pháp dạy truyền thống và hiện đại là cách tốt nhất để phương pháp dạy học phát huy hiệu quả. Xin trân trọng giới thiệu phương pháp dạy học *"Neo kiến thức bằng câu đố trong giảng dạy"*

Từ khóa : *Neo kiến thức.*

GIỚI THIỆU

Có một thực tế là hiện nay, hàng nghìn giáo viên, giảng viên ở khắp mọi miền đất nước qua nhiều năm hành nghề đã cảm thấy muốn đổi mới phương pháp giảng dạy, sao cho cả người dạy và người học đều đạt được hiệu quả cao hơn và hạnh phúc hơn trong việc dạy và học. Còn gì hạnh phúc hơn khi người dạy được đón nhận sự hân hoan, mến phục từ người học, ngược lại niềm vui và sức hấp dẫn từ người học này sang người học khác khi họ được học một người thầy vĩ đại. Cái gì làm nên người thầy vĩ đại ấy? Phải chăng, bên cạnh đạo đức người thầy đạt đến chuẩn mực, thanh khiết, lượng kiến thức sâu rộng thì phương pháp sư phạm là chìa khóa của thầy giáo vĩ đại ?"*Phương pháp giảng dạy được xem xét với tính cách là một khoa học. Đó là khoa học sư phạm, khoa học về giảng dạy truyền đạt kiến thức cho đối tượng người học*" [1]

Do đó, bên cạnh các phương pháp dạy học truyền thống thì người dạy cần áp dụng có hiệu quả nhất các phương pháp giảng dạy tích cực, nếu không áp dụng các phương pháp này thì chắc chắn hiệu quả giảng dạy sẽ không cao. Đó là các phương pháp tia chớp (phỏng vấn nhanh), phương pháp "*hỏi chuyên gia*", phương pháp "*hỏi đáp*" (nói chuyện với nhau để học), phương pháp "*nêu ý kiến ghi lên bảng*", phương pháp "*làm việc nhóm"*, phương pháp "*bể cá"* (người dạy và một số người học tham gia trao đổi thảo luận) phần còn lại của lớp học qua vòng ngoài, phương pháp "*neo kiến thức*".

Mỗi phương pháp đều có ưu điểm nổi bật và nên vận dụng sáng tạo vào từng môn học, từng bài học cụ thể, trong đó, "*neo kiến thức bằng câu hỏi"* là một phương pháp có hiệu quả, khả quan.

Phương pháp này được sử dụng để chốt lại kiến thức cho người học sau khi học xong một bài, một chương, một môn học hay toàn bộ khóa học. "*Neo kiến thức bằng câu đố"* được tiến hành như một trò chơi, có thắng bại, thưởng phạt, khá kịch tính nên tạo được nhiều hứng thú cho người học. Việc áp dụng phương pháp này sẽ khiến không khí lớp học trở nên sôi động và giúp buổi học đạt được kết quả cao.

Sau đây, xin giới thiệu với các đồng nghiệp "***phương pháp neo kiến thức bằng câu đố":***

Các bước thực hiện

1. Chuẩn bị câu hỏi

2. Phổ biến luật chơi
3. Chia đội chơi
4. Hỏi và trả lời
5. Tổng kết

Cách thức tiến hành

1. Chuẩn bị câu hỏi:

Lựa trọn một hệ thống câu hỏi mang tính chất câu đố (có đáp án kèm theo):

- Câu hỏi cần bám sát nội dung bài giảng;
- Câu hỏi phải ngắn gọn, dễ hiểu;
- Phù hợp với đối tượng người học.

2. Phổ biến luật chơi:

- Cử một người học làm trọng tài ghi điểm;
- Khi giáo viên đọc dứt câu hỏi thì người chơi mới được trả lời;
- Cả hai đội trả lời câu hỏi bằng cách hô đồng thanh: (*Đúng – Sai);*
- Đội nào trả lời đúng nhất và sớm nhất sẽ được ghi điểm;
- Quy định hình thức thưởng, phạt đối với đội thắng và đội thua (không bắt buộc).

3. Chia đội chơi:

Thường chia lớp học thành hai đội bằng nhau.

Nếu lớp đông cũng chỉ chia tối đa không quá ba đội (nhiều hơn sẽ rất khó trong việc kiểm soát vì trò chơi quy định nhận biết kết quả bằng âm thanh).

4. Hỏi và trả lời:

- Giáo viên đọc từng câu hỏi; Hai đội trả lời;
- Giáo viên nêu đáp án và tính điểm;

5. Tổng kết:

- Nhận xét đánh giá các đội chơi;
- Củng cố lại kiến thức;
- Khen thưởng đội thắng cuộc;

Một số gợi ý:

- Câu hỏi không nên quá dễ hoặc quá khó;
- Câu hỏi chỉ có một cách trả lời: Đúng hay sai;
- Đáp án được chuẩn bị trước
- Giáo viên có thể giải thích thêm về đáp án nếu thấy cần thiết
- Tránh để số điểm của hai đội quá chênh lệch (đội ít điểm quá sẽ chán nản và không nhiệt tình chơi nữa, gây tâm lý cay cú, bất bình)

Đừng đặt vấn đề thưởng, phạt, hãy tổ chức cuộc chơi thật vui, sao cho cả lớp đều cảm thấy thoải mái. Đội chiến thắng thấy được sự nỗ lực của mình đã mang lại kết quả tốt, còn đội chưa dành được chiến thắng cảm thấy cần phải cố gắng hơn nữa. Hãy khuyến khích đội thắng cuộc để chung vui cùng cả lớp. Mục tiêu cuối cùng là mọi thành viên của cả lớp đều hiểu và nhớ nội dung bài học.

Tâm lý thi đua dành phần thắng là đặc điểm riêng của phương pháp này. Sức hấp dẫn và lôi cuốn của trò chơi sẽ kích thích tối đa suy nghĩ của người học, làm cho họ nhớ bài lâu hơn, kiến thức được neo chốt trong não bộ nhiều hơn.

Dưới đây xin giới thiệu hệ thống các câu hỏi trong môn *"Những nguyên lý cơ bản của chủ nghĩa Mác Lê-nin"* vận dụng "*phương pháp neo kiến thức"*.

1. Xác định câu đúng nhất:

a) Sản xuất vật chất là hoạt động thực tiễn.

b) Sản xuất vật chất là hoạt động tinh thần

c) Sản xuất vật chất vừa là hoạt động vật chất vừa là hoạt động tinh thần.

d) Sản xuất vật chất không thuộc hoạt động thực tiễn cũng không thuộc hoạt động tinh thần.

2.

a) Trong quá trình sản xuất vật chất con người không chỉ cải tạo thế giới tự nhiên và xã hội mà còn cải tạo chính bản thân mình.

b) Trong quá trình sản xuất vật chất con người không chỉ cải tạo thế giới tự nhiên

c) Trong quá trình sản xuất vật chất con người không chỉ cải tạo thế giới xã hội.

d) Trong quá trình sản xuất vật chất con người cải tạo chính bản thân mình.

3.

a) QHSX là những quan hệ cơ bản giữa người với người trong quá trình sản xuất vật chất.

b) QHSX là những quan hệ cơ bản giữa người với người trong quá trình sản xuất xã hội.

c) QHSX là những quan hệ cơ bản giữa người với người trong quá trình sản xuất ra chính sức sản xuất.

4.

a) Trong LLSX thì người lao động là yếu tố quan trọng nhất.

b) Trong LLSX công cụ lao động là yếu tố quan trọng nhất

c) Trong LLSX thì đối tượng lao động là yếu tố quan trọng nhất

d) Trong LLSX các yếu tố như người lao động, công cụ lao động, đối tượng lao động đều quan trọng ngang nhau.

5.

a) Đặc trưng của cơ sở hạ tầng của một xã hội là do QHSX thống trị quy định.

b) Đặc trưng của cơ sở hệ tầng của một xã hội là do QHSX tàn dư quy định.

c) Đặc trưng của cơ sở hạ tầng của một xã hội là do QHSX mầm mống (tương lai) quy định.

d) Đặc trưng của cơ sở hạ tầng của một xã hội là so QHSX thống trị và QHSX tàn dư quy định.

6.

a) Trong kiến trúc thượng tầng thì Đảng phải có vai trò đặc biệt quan trọng nhất.

b) Trong kiến trúc thượng tầng thì Nhà nước có vai trò đặc biệt quan trọng nhất.

c) Trong kiến trúc thượng tầng thì các quan điểm chính trị, pháp luật, v.v… có vai trò đặc biệt, quan trọng vẫn để chữ "nhất".

d) Trong kiến trúc thượng tầng thì cơ quan tư pháp có vai trò đặc biệt, quan trọng nhất.

7.

a) Ý thức xã hội là đời sống tinh thần của xã hội phản ánh tồn tại xã hội.

b) Ý thức xã hội là mặt tinh thần của đời sống xã hội phản ánh tồn tại xã hội.

c) Ý thức xã hội là toàn bộ đời sống tinh thần của xã hội phản ánh tồn tại xã hội.

d) Ý thức xã hội là đời sống xã hội phản ánh tồn tại xã hội.

8.

a) Ý thức xã hội có thể tác động trở lại tồn tại xã hội thông qua hoạt động thực tiễn của con người.

b) Ý thức xã hội có thể tác động trở lại tồn tại xã hội thông qua nhà nước.

c) Ý thức xã hội có thể tác động trở lại tồn tại xã hội thông qua các đoàn thể xã hội.

d) Tự thân ý thức xã hội có thể tác động trở lại xã hội thông qua các đoàn thể xã hội.

9.

a) Các hình thái kinh tế xã hội vận động phát triển không chịu sự tác động của các quy luật khách quan.

b) Các hình thái kinh tế - xã hội vận động phát triển do sự tác động của các quy luật khách quan.

c) Các hình thái kinh tế - xã hội vận động phát triển do sự tác động của con người.

d) Các hình thái kinh tế - xã hội vận động phát triển do sự tác động của các quy luật tự nhiên.

10.

a) Nguồn gốc sâu xa của sự vận động, phát triển của xã hội là ở sự phát triển của QHSX.

b) Nguồn gốc sâu xa của sự vận động, phát triển của xã hội là ở sự phát triển của cơ sở hạ tầng.

c) Nguồn gốc sâu xa của sự vận động, phát triển của xã hội là ở sự phát triển của kiến trúc thượng tầng.

d) Nguồn gốc sâu xa của sự vận động, phát triển của xã hội là ở sự phát triển của LLSX.

11.

a) Giai cấp là những tập đoàn người khác nhau về địa vị xã hội nhất định.

b) Giai cấp là những tập đoàn người khác nhau về địa vị trong một hệ thống sản xuất xã hội nhất định.

c) Giai cấp là những tập đoàn người khác nhau về huyết thống trong một xã hội nhất định.

d) Giai cấp là những tập đoàn người khác nhau về sở thích trong một xã hội nhất định.

12.

a) Đấu tranh giai cấp là một trong những động lực phát triển của xã hội.

b) Đấu tranh giai cấp là một trong những động lực phát triển của xã hội có giai cấp.

c) Đấu tranh giai cấp là một trong những động lực phát triển của xã hội có các giai cấp khác nhau.

d) Đấu tranh giai cấp là một trong những động lực phát triển của xã hội có đối kháng giai cấp.

13.

a) Cách mạng vô sản là một kiểu cách mạng xã hội hơn hẳn về chất so với tất cả các cuộc cách mạng trước đây vì nó xóa bỏ mọi hình thức người nô dịch người, người áp bức người.

b) Cách mạng vô sản là một kiểu cách mạng xã hội hơn hẳn về chất so với tất cả các cuộc cách mạng trước đây vì nó xóa bỏ mọi hình thức nhà nước.

c) Cách mạng vô sản là một kiểu cách mạng xã hội hơn hẳn về chất so với tất cả các cuộc cách mạng trước đây vì nó xóa bỏ mọi hình thức tư hữu.

d) Cách mạng vô sản là một kiểu cách mạng xã hội hơn hẳn về chất so với tất cả các cuộc mạng trước đây vì nó thay đổi hình thức người áp bức người.

14.

a) Trong tính hiện thực của nó, bản chất con người là tổng các quan hệ xã hội.

b) Trong tính hiện thực của nó, bản chất con người là những quan hệ xã hội.

c) Trong tính hiện thực của nó, bản chất con người là tổng hòa những quan hệ xã hội.

d) Trong tính hiện thực của nó, bản chất con người là tất cả những quan hệ xã hội.

15.

a) Quần chúng nhân dân bao gồm tất cả những người lao động.

b) Quân chúng nhân dân bao gồm tất cả những lực lượng giai cấp, những tập đoàn người, những cá nhân thúc đẩy sự phát triển của xã hội, trong đó chủ yếu là quần chúng lao động.

c) Quần chúng nhân dân bao gồm tất cả những lực lượng giai cấp, những tập đoàn người, những cá nhân không phải người lãnh đạo.

d) Quần chúng nhân dân bao gồm công nhân, nông dân, tri thức.

ĐÁP ÁN

1-a	2-a	3-a	4-a	5-a	6-b	7-b	8-a
9-b	10-d	11-b	12-d	13-a	14-c	15-b	

KẾT LUẬN

Giáo dục là vấn đề nan giải. Việc thay đổi phương pháp giảng dạy luôn là vấn đề tranh cãi. Tuy nhiên mục đích cuối cùng của những cuộc tranh cãi đó là tạo nên những làn sóng cải cách hữu hiệu.

Chúng ta cần có cách dạy cho sinh viên hoàn toàn mới, không chỉ là học kiến thức và sự kiện. Những cái đó đương nhiên vẫn cần thiết, nhưng ngày nay để biết được những điều đó không khó khăn gì. Tôi mong muốn, trong những bài giảng cụ thể, các bạn nên áp

dụng phương pháp *"Neo kiến thức bằng câu đố"*, góp phần tăng cường hiệu quả và chất lượng bài giảng. "*Để làm cho tương lai trở thành hiện thực, chúng ta phải tự tin và tin tưởng vào giá trị của chính mình. Đó là điều các trường học phải truyền dạy cho người học*".[2]

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phùng Văn Bộ (chủ biên) 2001, Một số vấn đề về phương pháp giảng dạy và nghiên cứu triết học, nxb Giáo dục, Hà Nội, tr 5.

[2] Charles Handy, 2003, Tạp chí Tia sáng, số 9.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍNH TỔNG CỦA CHUỖI SỐ

Phạm Thị Thu Hằng

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Để nghiên cứu sự hội tụ của một chuỗi số thì một trong những phương pháp cơ bản là ta phải tính xem giới hạn của tổng riêng thứ n có tồn tại hữu hạn hay không, nếu tồn tại thì chuỗi số đó sẽ hội tụ và có tổng chính bằng giá trị giới hạn đó. Tuy nhiên việc tính tổng của một chuỗi số không phải là đơn giản. Trong bài báo này tác giả đề cập tới một số phương pháp, kỹ năng để tính tổng của một chuỗi số bằng định nghĩa.

Từ khóa *Chuỗi số, tổng riêng, tổng chuỗi, giới hạn ,đồng nhất thức.*

NỘI DUNG

Theo định nghĩa của chuỗi số ta đã biết để xác định 1 chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ hội tụ và có tổng là S thì phải tồn tại giới hạn của tổng riêng thứ n $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Bài toán tính tổng của chuỗi số bằng định nghĩa ta có thể chia thành một số các dạng sau:

1. Tìm số hạng tổng quát và tính tổng của chuỗi nếu biết trước dãy tổng riêng của chúng

Phương pháp:

+ Xác định số hạng tổng quát $U_n = S_n - S_{n-1}$

+ Tổng của chuỗi $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Bài toán 1: Tìm số hạng tổng quát và tính tổng của chuỗi số biết dãy tổng riêng là $\{S_n\}, S_n = \dfrac{n}{n+1}$

Giải: Số hạng tổng quát của chuỗi là

$$U_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Tổng của chuỗi là $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

.

Bài toán 2: Tìm số hạng tổng quát và tính tổng của chuỗi số biết dãy tổng riêng là $\{S_n\}, S_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} + (-1)^n \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

Giải: Số hạng tổng quát của chuỗi là

$$U_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n^2 - 1}$$

Tổng của chuỗi là

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

2. Tính tổng của chuỗi bằng cách phân tích số hạng tổng quát của chuỗi

Phương pháp: Để tính tổng của chuỗi số bằng định nghĩa ta có thể phân tích số hạng tổng quát của chuỗi thành các số hạng tổng quát của 1 cấp số nhân, cấp số cộng, hoặc phân tích thành các số hạng để khi tính tổng riêng thứ n các số hạng có thể triệt tiêu lẫn nhau.

Bài toán 3: Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n}$

Giải: $U_n=\frac{2^n-3^n}{5^n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n$

Tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n=\left[\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+...+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$
$$-\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+...+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$$
$$=\frac{2}{5}.\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}-\frac{3}{5}.\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}$$
$$=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]-\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$$

Khi đó tổng của chuỗi là

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{6}$$

Bài toán 4: Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Giải: Ta có $U_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

Khi đó tổng của chuỗi là

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Từ ví dụ trên ta có thể đưa ra bài toán mở rộng sau:

Bài toán 5: Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)...(n+k)},\ k\in N$$

Giải: Ta có

$$U_n=\frac{1}{n(n+1)...(n+k)}$$
$$=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+k-1)}-\frac{1}{(n+1)...(n+k)}\right)$$

Sau khi rút gọn ta được tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1.2....k}-\frac{1}{(n+1)...(n+k)}\right),\quad k\in N$$

Khi đó tổng của chuỗi là

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1.2....k}-\frac{1}{(n+1)...(n+k)}\right)=\frac{1}{k.k!}$$

Bài toán 6: Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$$

Giải: Ta có

$$U_n=\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$$
$$=\ln n-\ln(n+1)+\ln(2n+1)-\ln(2n-1)$$

Tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n=\left[\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+...+\ln n-\ln(n+1)\right]$$
$$+\left[\ln 3-\ln 1+\ln 5-\ln 3+...+\ln(2n+1)-\ln(2n-1)\right]$$
$$=\ln(2n+1)-\ln(n+1)=\ln\frac{2n+1}{n+1}$$

Khi đó tổng của chuỗi là

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln 2$$

3. Tính tổng của chuỗi bằng cách sử dụng các đồng nhất thức

Phương pháp: Sử dụng một số công thức (đặc biệt là công thức lượng giác) để phân tích số hạng tổng quát của chuỗi

Bài toán 7: Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2+1}$$

Giải: Ta có số hạng tổng quát của chuỗi là

$$U_n = \arctan \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2+1}$$

$$= \arctan \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}}{1 + \frac{1}{n^2(n+1)^2}}$$

Sử dụng công thức

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$$

$$\Rightarrow U_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{(n+1)^2}$$

Tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n = \left(\arctan 1 - \arctan \frac{1}{2^2} \right)$$

$$+ \left(\arctan \frac{1}{2^2} - \arctan \frac{1}{3^2} \right)$$

$$+ \ldots + \left(\arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$= \arctan 1 - \arctan \frac{1}{(n+1)^2}$$

Khi đó tổng của chuỗi là

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\arctan 1 - \arctan \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Bài toán 8: Tính tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{a}{2^n}, \quad a \neq 0$$

Giải: Ta có số hạng tổng quát của chuỗi là

$$U_n = \frac{1}{2^n} \tan \frac{a}{2^n}$$

Sử dụng công thức

$$\cot x = 2\cot 2x + \tan x, \quad x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$\Rightarrow \tan x = \cot x - 2\cot 2x$. Khi đó

$$U_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{a}{2^n} - \frac{2}{2^n} \cot \frac{2a}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cot \frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{a}{2^{n-1}}$$

Tổng riêng thứ n của chuỗi là:

$$S_n = \frac{1}{2} \cot \frac{a}{2} - \cot a + \left(\frac{1}{2^2} \cot \frac{a}{2^2} - \frac{1}{2} \cot \frac{a}{2} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2^3} \cot \frac{a}{2^3} - \frac{1}{2^2} \cot \frac{a}{2^2} \right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^n} \cot \frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{a}{2^{n-1}} \right)$$

$$= -\cot a + \frac{1}{2^n} \cot \frac{a}{2^n}$$

Khi đó tổng của chuỗi là

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(-\cot a + \frac{1}{2^n} \cot \frac{a}{2^n} \right) = \frac{1}{a} - \cot a$$

KẾT LUẬN

Hầu hết các bài toán tính tổng của chuỗi số bằng định nghĩa đều gặp nhiều khó khăn trong việc tính tổng riêng thứ n. Trong khuôn khổ bài báo, tác giả trình bày một số phương pháp, kỹ năng phổ biến nhất nhằm định hướng, tìm ra quy luật cho một số bài toán đơn giản. Tác giả hy vọng sẽ tiếp tục nghiên cứu vấn đề này để có thể phân chia các bài toán tính tổng của chuỗi số thành những dạng cụ thể hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Bình, *Bài tập Giải tích 3*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 2001

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, Tập 2 – Phép tính Giải tích một biến số,* NXB Giáo dục, 2004.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Bài tập Toán học cao cấp, Tập 2 – Phép tính Giải tích một biến số,* NXB Giáo dục, 2004.

SUMMARY

SOME PROBLEMS OF SUMING THE SERIES

Pham Thi Thu Hang

Department of Mathematics, Faculty of General Sciences, Thai Nguyen University of Technology

One of basic methods in studying the convergence of a series is calculating the limits of sequence of partial sums. If the limit exists, the series is convergent and its sum is the limit. However, suming the series is not simple. In this paper we mention some methods and skills to calculate the sum of the series through definitions.

Keywords *Series, partial sum, sum of the series, limit, identity.*

MỘT SỐ ĐỀ XUẤT TRONG GIẢNG DẠY HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 1

Ôn Ngũ Minh

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Giải tích 1 hay *Phép tính giải tích hàm một biến số thực* là học phần bắt buộc trong khung chương trình của tất cả các ngành trong Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, và cũng là học phần bắt buộc đối với tất cả các ngành thuộc nhóm ngành kỹ thuật trong các trường đại học trong nước cũng như ngoài nước.

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số lưu ý nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy học phần Giải tích 1.

TỪ KHÓA

Tính độ dài, tích thể tích, tính diện tích, miền hội tụ, chuỗi Fuarier.

NỘI DUNG

1. *Tìm hàm ngược và chỉ ra miền xác định, miền giá trị của hàm ngược*

Quá trình tìm hàm ngược của hàm số $y = f(x)$ được thực hiện bởi các phép biến đổi tương đương nhằm dẫn tới phương trình $x = g(y)$. Hoán đổi x với y, ta nhận được hàm ngược $y = f^{-1}(x) = g(x)$.

Miền xác định và miền giá trị của hàm số $f(x)$ tương ứng sẽ là miền giá trị và miền xác định của hàm ngược $f^{-1}(x)$.

Ví dụ, với $y = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$, ta có miền xác định là $-2 \le x < 2$, miền giá trị là $y \ge 0$. Biến đổi tương đương

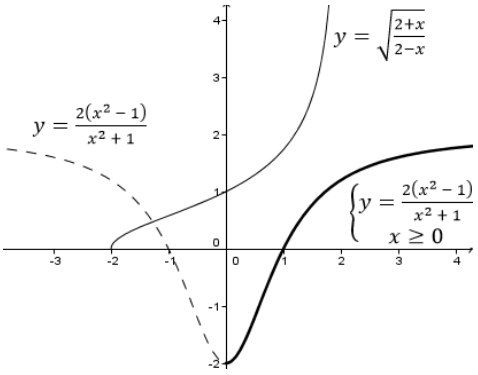
$$y = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{2+x}{2-x} \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2(y^2 - 1)}{y^2 + 1} \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Hoán đổi x với y, ta nhận được

$$\begin{cases} y = \dfrac{2(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Nếu biến đổi mà không kèm theo điều kiện của y thì từ $y = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 + 1}$ ta dễ sai lầm khi khẳng định hàm ngược này xác định với mọi x. Dựa vào miền xác định và miền giá trị của $y = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ ta suy ra hàm ngược này có miền giá trị là $[-2, 2)$ và miền xác định là $x \ge 0$.



2. Tính độ dài đường cong

Độ dài đường cong được cho được tính theo công thức rất kinh điển, được trình bày trong các tài liệu [1], [3] và [4].

Với đường cong được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ thì $s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$

Với đường cong được cho bởi phương trình trong tọa độ Đề cac $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ ta có thể xem đó là phương trình với tham số x, tức là

$x = x, y = f(x), a \leq x \leq b$

Do đó công thức tính độ dài là

$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$

Trường hợp đường cong được cho trong tọa độ cực, $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ ta cũng đưa về phương trình tham số

$x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi, \alpha \leq \varphi \leq \beta$

Nhưng vì

$[x'(\varphi)]^2 + [y'(\varphi)]^2 = [r]^2 + [r']^2$

nên công thức tính độ dài là

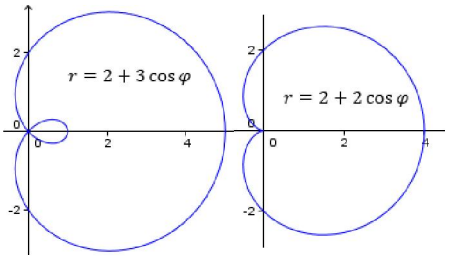
$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r]^2 + [r']^2}d\varphi$

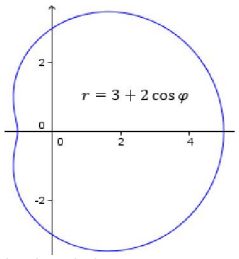
Ta thấy rằng, trong cả ba trường hợp hàm dưới dấu tích phân đều là biểu thức căn bậc hai với biểu thức trong căn là không âm. Vì thế chỉ một lớp rất hạn chế các đường cong tính được độ dài theo công thức này.

Ví dụ, với các đường cardioid có phương trình $r = a + b\cos\varphi$. Khi đó

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}$$

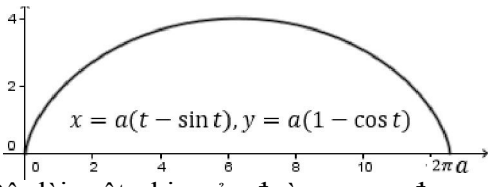
$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \begin{cases} 2|a|\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| & a = b \\ 2|a|\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| & a = -b \end{cases}$$





Trong trường hợp $a = \pm b$ thì độ dài đường cardioid bằng 8a, tức là bằng 2 lần chu vi hình vuông với cạnh độ dài a.

Liên quan đến số đo độ dài này, ta xét đường cycloid được cho bởi phương trình tham số $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$



Độ dài một nhịp của đường cong được tính theo công thức

$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8a,$

tức là cũng bằng độ dài đường cardioid.

Nếu $a \neq \pm b$ thì không tìm được nguyên hàm. Nhưng chúng ta có thể tính gần đúng tích phân xác định $I = \int_a^b f(x)dx$ theo phương pháp Simson[2].

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2)$$

m là một số nguyên dương,

$$h = \frac{b-a}{2m}, x_k = a + kh, y_k = f(x_k)$$

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}$$

$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}$$

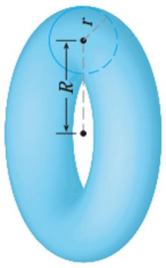
Ta có thể viết một hàm trong MATLAB để tính gần đúng tích phân xác định.

```
function out = simson(f, a, b, n)
  n = 2*n; h = (b - a)/n;
  x = a:h:b; y = f(x);
  s1 = sum(y(2:2:n));
  s2 = sum(y(3:2:n-1));
  out = h/3*(y(1) + y(n+1) + 4*s1 + 2*s2);
```

Để tính độ dài của đường cardioid có phương trình $r = 1 + 2\cos\varphi$, dùng các lệnh

```
>> f = @(x) sqrt(5 + 4*cos(x));
>> I = 2*simson(f,0,pi,10)
```

3. Tính thể tích vật thể tròn xoay



Hình xuyến bên có thể xem là được sinh ra khi quay đường tròn có phương trình $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ quanh trục x. Thể tích của nó bằng hiệu $V_T - V_D$, trong đó V_T và V_D là số đo thể tích của các vật thể tròn xoay được sinh ra tương ứng với nửa trên và nửa dưới của đường tròn, và được cho bởi công thức $V = 2\pi^2 Rr^2$.

Tuy nhiên, để gợi nhớ, chúng ta biểu diễn kết quả trên dưới dạng

$$V = 2\pi^2 Rr^2 = (\pi r^2)(2\pi R)$$

Nghĩa là, đúng bằng thể tích của một hình trụ có chiều cao $2\pi R$ và bán kính đáy r, tựa như cắt đôi hình xuyến rồi "duỗi thẳng".

4. Tính diện tích mặt tròn xoay

Diện tích của hình xuyến trên là

$$S = 4\pi^2 rR = (2\pi r)(2\pi R)$$

Nghĩa là, đúng bằng diện tích hình chữ nhật với độ dài các cạnh tương ứng là $2\pi r$ và $2\pi R$, tựa như ta xẻ hình xuyến bằng hai nhát ngang và dọc rồi "trải phẳng" thành hình chữ nhật.

5. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

(a) Khai triển của hàm $\cos x$

Ta biết rằng, khai triển Maclaurin của hàm $\cos x$ trong lân cận điểm $x = 0$ là

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots (1)$$

Đây chính là chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, với $a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{(2n)!} & k = 2n \\ 0 & k = 2n+1 \end{cases}$.

Để tìm bán kính hội tụ, ta sử dụng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi lũy thừa,

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}} & k = 2n \\ 0 & k = 2n+1 \end{cases} \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Muốn sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, ta phải xét chuỗi lũy thừa tương ứng

$$1 - \frac{X}{2!} + \frac{X^2}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{X^n}{(2n)!} + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^n}{(2n)!} \qquad (2)$$

Ta có $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ nên

$$\left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi (2) là $(-\infty, \infty)$, do đó miền hội tụ của chuỗi (1) là $x^2 < \infty$, hay $-\infty < x < \infty$.

(b) Khai triển của hàm $\sin x$7

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots (3)$$

Vì $a_{2n} = 0$ và $a_{2n-1} = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}$ nên ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy,

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n-1)!}} & k = 2n-1 \\ 0 & k = 2n \end{cases} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

Do đó miền hội tụ là $-\infty < x < \infty$.

Tất nhiên, ta cũng có thể áp dụng tiêu chuẩn d'Alambert cho chuỗi số. Thật vậy, với mỗi x bất kỳ cố định thì vế phải của (3) là một chuỗi số với số hạng tổng quát thứ n là

$$u_n = \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Khi $n \to \infty$ thì $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2}{2n(2n+1)} \to 0$, tức là chuỗi số này hội tụ. Nhưng vì x là bất

kỳ, nên khẳng định miền hội tụ của chuỗi hàm (3) là $-\infty < x < \infty$.

(c) Khai triển hàm $\ln(1+x)$

Ta có

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

Dễ thấy miền hội tụ là $-1 < x \le 1$.

Vì thế, với $x \in (0, 2]$, hàm $\ln x$ được tính theo công thức

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$

Với $x > 2$, $\ln x = -\ln\frac{1}{x}$, vì $\frac{1}{x} \in (0, 2]$.

Trong MATLAB, ta có thể viết hàm tính $\ln x$ như sau:

```
function s = ln(x)
  if x <= 2
     x = x - 1;
     s = 0; t = x; k = 1;
     while s + t ~= s
        s = s + t;
        k = k + 1;
        t = -t*x*(k-1)/k;
     end
  else
     s = -ln(1/x);
  end
```

(d) Khai triển hàm $(1+x)^\alpha$

Với $-1 < x < 1$ thì

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Nên với $0 < x < 2$,

$$x^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

Với $x \ge 2$ thì $t = \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}$, tính được t^α theo công thức trên, và $x^\alpha = \frac{1}{t^\alpha}$.

6. Khai triển một hàm thành chuỗi Fuarier

(a) Về công thức khai triển Fuarier của hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Trong đó

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

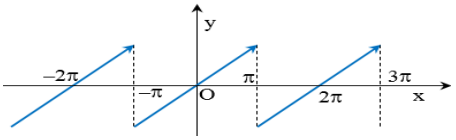
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Viết tách hằng số ra khỏi chuỗi nhằm chỉ ra giá trị trung bình của chuỗi.

Viết dưới dạng $\frac{a_0}{2}$ là để sử dụng chung một công thức cho các $a_k, k \ge 0$.

(b) Một số công thức

Ví dụ 1 Khai triển $f(x) = x$ trên $[-\pi, \pi)$, tuần hoàn chu kỳ 2π thành chuỗi Fuarier.



Vì $f(x)$ là hàm lẻ nên $a_k = 0\ \forall k \ge 0$, và $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\, dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$. Do đó chuỗi Fuarier là $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx$.

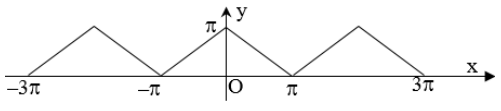
Khi đó $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx$ với mọi $x \ne (2k+1)\pi$. Chú ý rằng công thức $x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx$ chỉ đúng với $x \in (-\pi, \pi)$.

Với $x = \frac{\pi}{2}$, ta nhận được

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin\frac{k\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

Ví dụ 2 Khai triển Fuarier hàm số f(x) chẵn, tuần hoàn chu kì 2π, bằng $\pi - x$ trên $[0, \pi]$.



Vì là hàm chẵn nên $b_k = 0\ \forall k \ge 1$.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos kx\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 & k = 2n \\ \frac{4}{\pi(2n+1)^2} & k = 2n+1 \end{cases} \text{ với k > 0}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \pi$$

Nên chuỗi Fuarier là $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

Khi đó với $x \in [-\pi, \pi]$ thì

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

hay $$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Thay $x = 0$ ta nhận được

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Ví dụ 3 Cho hàm số $f(x) = x^2$ trên [–1, 1], tuần hoàn chu kì 2. Khai triển theo các hàm cosine ta nhận được chuỗi Fuarier là $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos k\pi x}{k^2}$.

Vì thế, $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos k\pi x}{k^2}$ với $x \in [-1, 1]$. Thay $x = 0$ ta nhận được

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}$$

Hay

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \cdots \quad (1*)$$

Thay $x = 1$ ta nhận được

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Hay $$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots (2*)$$

So sánh (1*) và (2*) ta nhận được

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots$$
$$= 2\left[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \cdots\right]$$
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \cdots$$
$$= 3\left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2} + \cdots\right]$$

Kết hợp Ví dụ 2 và Ví dụ 3 ta nhận được

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2} + \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \cdots$$

KẾT LUẬN

Khi giảng dạy các học phần toán nói chung và học phần Giải tích 1 nói riêng cho sinh viên thuộc nhóm ngành kỹ thuật, chúng ta cần cân nhắc để đưa ra các ví dụ thích hợp. Đồng thời cần mở rộng nội dung kiến thức sao cho sát với các bài toán trong thực tiễn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] James Stewart, *Single variable calculus Early Transcendentals* 7th edition, 2010.

[2] Laurene V. *Applied numerical analysis using MATLAB*, Fausett Univesity of South Carolina Aiken, 1999.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, Tập 2 – Phép tính Giải tích một biến số,* NXB Giáo dục, 2004.

[4] Ôn Ngũ Minh, *Toán học cao cấp – Phép tính giải tích một biến số*, nxb KH&KT, 2010.

SOME SUGGESTIONS FOR TEACHING MODULE CALCULUS 1

On Ngu Minh

Department of Mathematics, Faculty of General Sciences, Thai Nguyen University of Technolog

SUMMARY

Calculus 1 or *Single Variable Calculus* is a compulsory subject in the curriculum of all disciplines at Thai Nguyen University of Technology, and also the compulsory subject in technology curricula at universities in Vietnam and all over the world.

In this paper we give some comments and some suggestions for preparing *Calculus 1* lectures to enhance the quality of teaching this module.

Keywords Distances, areas, volumes, convergences, Fuarier series.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH THỨC

Nguyễn Thị Xuân Mai

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Định thức là khái niệm được đề cập đến ngay từ chương đầu của học phần Toán 1 (Đại số tuyến tính) và được ứng dụng rất nhiều trong việc giải quyết các bài tập của học phần này như tìm ma trận nghịch đảo, giải hệ Cramer, tìm trị riêng... Bài viết sẽ tập trung vào việc hệ thống lại các ứng dụng đó của định thức và đưa ra thêm ứng dụng của định thức trong việc định nghĩa hướng của một cơ sở trong không gian Euclid và trong việc tính thể tích của m – đơn hình.

KEYWORDS: Định thức, m – đơn hình, ma trận nghịch đảo, hệ phương trình tuyến tính, trị riêng, hướng của cơ sở….

NỘI DUNG

Trước hết, ta cần nhắc lại định nghĩa cũng chính là cách tính định thức của một ma trận vuông: Cho $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Kí hiệu M_{ij} là ma trận cấp $(n-1)$, nhận được từ A sau khi bỏ đi hàng i và cột j. Định thức của ma trận vuông A, kí hiệu là det(A), là một số thực được định nghĩa đệ quy theo n như sau:

Với n = 1: $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$

Với n = 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Với $n > 2$: $\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + ... + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n})$

Định thức được sử dụng rất nhiều trong quá trình giải quyết các bài tập Toán cao cấp. Sau đây là một số ứng dụng thường gặp:

1. Định thức được dùng để ***kiểm tra ma trận có nghịch đảo hay không*** dựa theo định lý sau đây:

Nếu $\det(A) \neq 0$ thì tồn tại A^{-1} được biểu diễn bởi công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C^t = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Trong đó $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$, M_{ij} là ma trận con thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng i, cột j.

Ví dụ 1: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau (nếu có) : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

+ Ta có $\det(A) = 1 \neq 0$ nên tồn tại A^{-1}.

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -7 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C^t = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Định thức dùng để ***biểu diễn nghiệm của một hệ Cramer*** qua định lý Cramer:

Hệ Cramer $Ax = b$, $\det(A) \neq 0$ có nghiệm duy nhất tính theo công thức $x = A^{-1}b$, tức là $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$, với A_j là ma trận nhận được từ A sau khi thay cột thứ j bằng cột vế phải b.

Ví dụ 2: Giải hệ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

Nhận thấy $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

nên hệ đã cho là hệ Cramer.

Khi đó $\det(A_1) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = 1 .$$

Tương tự: $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -20$,

$\det(A_3) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow x_2 = 2, x_3 = 1.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$.

3. Định thức dùng để ***tìm các trị riêng của một ma trận*** thông qua việc giải phương trình đặc trưng.

Ví dụ 3: Tìm các trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4 .$$

Vậy ma trận đã cho có 2 trị riêng $\lambda_1 = -2$ (đơn) và $\lambda_2 = 4$ (kép).

4. Định thức được dùng để ***định nghĩa hướng của các cơ sở trong không gian Euclid n chiều***.

Trong không gian Euclid n chiều, cho cơ sở $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Ma trận A có cột (hàng) thứ i là tọa độ của u_i. Khi đó, nếu $\det(A) > 0$ thì ta nói các vector trên tạo thành một cơ sở thuận chiều, nếu $\det(A) < 0$ thì ta nói các vector trên tạo thành cơ sở ngược chiều.

Ví dụ 4: Trong R^3 với tích vô hướng Euclid cho hai cơ sở:

$S_1 = \{u_1(2,1,3), u_2(2,0,7), u_3(0,-1,7)\}$ và

$S_2 = \{v_1(1,1,2), v_2(0,3,-1), v_3(1,4,8)\}$

Ta có $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = -6 < 0$ nên S_1 là một cơ sở ngược chiều trong R^3.

Tương tự : $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 21 > 0$

nên S_2 là một cơ sở thuận chiều trong R^3.

5. Định thức còn được dùng để ***tính thể tích của m – đơn hình*** trong không gian Euclid n chiều V^n.

Trước hết, ta nhắc lại một số khái niệm liên quan

+ Hệ điểm độc lập: Hệ m + 1 điểm $A_0, A_1, \ldots, A_m$ được gọi là hệ điểm độc lập nếu họ vector $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$ độc lập tuyến tính.

+ Định thức Gram của hệ m vector S $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_m}\}$ là:

$$\det G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_m}) = \begin{vmatrix} \vec{u_1}\vec{u_1} & \vec{u_1}\vec{u_2} & \ldots & \vec{u_1}\vec{u_m} \\ \vec{u_2}\vec{u_1} & \vec{u_2}\vec{u_2} & \ldots & \vec{u_2}\vec{u_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{u_m}\vec{u_1} & \vec{u_m}\vec{u_2} & \ldots & \vec{u_m}\vec{u_m} \end{vmatrix}$$

Định thức Gram không phụ thuộc vào thứ tự các vector trong hệ S.

+ m – đơn hình (đơn hình m chiều) : Cho hệ điểm độc lập $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Tập các

điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OA_i},\lambda_i\geq 0$ với mọi điểm O gọi là m – đơn hình đỉnh $A_0, A_1, \ldots, A_m$, kí hiệu là $S(A_0, A_1, \ldots, A_m)$.

Ví dụ: Đơn hình 0 – chiều là 1 điểm, đơn hình 1 – chiều là đoạn thẳng, đơn hình 2 – chiều là tam giác, đơn hình 3 – chiều là tứ diện.

Thể tích của m – đơn hình $S(A_0, A_1,\ldots,A_m)$ được tính bằng công thức sau:

$$V\left(S\left(A_0,A_1,....,A_m\right)\right)=\frac{1}{m!}.\sqrt{\det G\left(\overrightarrow{A_0A_1},\overrightarrow{A_0A_2},....,\overrightarrow{A_0A_m}\right)}$$

Ví dụ 5: Trong không gian R^3 với cơ sở chính tắc cho ba điểm A(3,4,-1) , B(2,0,3), C(-3,5,4). Chứng minh rằng ba điểm trên không thẳng hàng và hãy tính diện tích tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1,-4,4);\overrightarrow{AC}=(-6,1,5)$.

Vì $\frac{-1}{-6}\neq\frac{-4}{1}\neq\frac{4}{5}$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

$$G\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{bmatrix}\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\rangle & \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle\\ \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle & \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}33 & 22\\ 22 & 62\end{bmatrix}$$

Vậy diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2!}.\sqrt{\det G\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{1}{2!}.\sqrt{\begin{vmatrix}33 & 22\\ 22 & 62\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}.\sqrt{1562}\left(dvdt\right)$$

Ví dụ 6: Trong không gian R^3 với cơ sở chính tắc cho bốn điểm A(1,2,-3) , B(2,0,1), C(-3,1,4), D(2,4,-3). Hãy tính thể tích tứ diện ABCD.

Từ giả thiết ta có:

$\overrightarrow{AB}=(1,-2,4);\overrightarrow{AC}=(-4,-1,7);$

$\overrightarrow{AD}=(1,2,0)$

Khi đó:

$$G=G\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{bmatrix}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 26 & -3\\ 26 & 66 & -6\\ -3 & -6 & 5\end{bmatrix}$$

Thể tích của tứ diện ABCD là:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3!}.\sqrt{\det(G)}=\frac{1}{6}.\sqrt{3136}=\frac{28}{3}(dvtt)$$

KẾT LUẬN

Trên đây là một số ứng dụng của định thức trong lĩnh vực Toán học. Đây đều là các ứng dụng thường gặp, dễ hiểu và dễ áp dụng. Tuy nhiên tôi cũng mong muốn sẽ thu thập và hệ thống được nhiều hơn nữa các ứng dụng khác của định thức, không chỉ trong Toán học mà còn trong Vật lý, trong các ngành Kỹ thuật…

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Văn Như Cương, Tạ Mân – *Hình học affine và hình học Euclid* – NXB ĐH Quốc gia Hà Nội.

[2] Ôn Ngũ Minh – *Bài giảng môn Toán 1 (Đại số tuyến tính)* – ĐH. Kỹ thuật Công nghiệp Thái nguyên.

[3] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh – *Toán học cao cấp tập 1* – NXB Giáo dục.

SOME APPLICATIONS OF THE DETERMINANT

Nguyen Thi Xuan Mai

Department of Math,Faculty of basic, Thai Nguyen university of technology

SUMMARY

Determinant is the concept mentioned right from the first chapter of the module Mathematics 1 (Linear Algebra) and applied a lot in solving the exercises of this module as finding inverse matrix , the system Cramer , find eigenvalues... This paper will focus on the system of the application form and make more applications determinant in defining the direction of a space facility in Euclid and in the calculation the volume of m - simplex .

KEYWORDS : Determinant , m - simplex , inverse matrix , system of linear equations , eigenvalues, the direction of the base ... .

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TÍNH GIÁ TRỊ CÁC ĐẠI LƯỢNG BIẾN THIÊN KHÔNG ĐỀU

Hoàng Thanh Nga

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Phương pháp tính tích phân có ý nghĩa quan trọng trong tính giá trị các đại lượng biến thiên không đều đặc biệt với các bài toán như tính độ dài đường cong, tính khối lượng của một thanh vật chất hay tính mômen tĩnh của bản phẳng đồng chất . Khi cần tính một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác biến thiên trên một đoạn ta sử dụng phương pháp tính tích phân .

Keywords

Phương pháp tích phân, đại lượng biến thiên không đều.,

NỘI DUNG

Khi cần xác định một đại lượng M phụ thuộc một đại lượng x nào đó biến thiên trên đoạn $[a,b]$. Phương pháp tích phân thực hiện một quy trình gồm các bước sau đây:

1) Chia tùy ý $[a,b]$ thành nhiều phần nhỏ, ta được một phân hoạch của $[a,b]$

Tương ứng với phân hoạch đó, đại lượng M cũng được chia thành nhiều phần nhỏ, gọi là phần tử ΔM .

2) Tìm cách tính gần đúng ΔM qua một biểu thức tuyến tính đối với Δx

$\Delta M \approx q(x)\Delta x$

3) Trên mỗi Δx ta đều làm như vậy rồi lấy tổng, ta được giá trị gần đúng của đại lượng M: $M \approx \sum q(x)\Delta x$

4) Qua giới hạn khi đường kính phân hoạch tiến tới 0, ta được

$$M = \lim_{\Delta x \to 0} \sum q(x)\Delta x = \int_a^b q(x)dx$$

1. Tính độ dài đường cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong $[a,b]$, gọi cung AB là đồ thị của hàm $f(x)$, $x \in [a,b]$.Ta phải tính độ dài s của cung AB. Tại điểm x ta hãy tách ra một phần tử vi phân cung Δs (cung MK) ứng với phần tử vi phân Δx .

Vì cung MK là vi phân cung nên ta có thể xem cung MK là độ dài đoạn MK. Khi đó ta có: $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Theo công thức lagrang thì $\Delta y = f'^2(\xi)\Delta x$

$\xi \in [x, x_k]$ Nên $\Delta s = \sqrt{1 + f'^2(\xi)}\Delta x$ Khi đó

$$s = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{1 + f'^2(\xi)}\Delta x$$

Do đó, độ dài đường cong AB được tính bằng công thức: $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$

- Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số:

$x = x(t);\ \ y = y(t)\ \ t \in [\alpha, \beta],$

Trong đó $x(t), y(t)$ là các hàm số có các đạo hàm liên tục $x'(t), y'(t)$ và không đồng thời bằng 0 trên $[\alpha, \beta]$, thì:

$ds = \sqrt{x'(t)dt^2 + y'(t)dt^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

Do đó: $s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$

- Nếu đường cong trong không gian cho bởi các phương trình

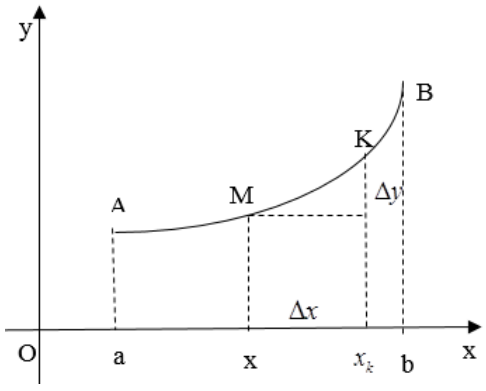
$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$

Với các giả thiết tương tự như trên thì:

$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$

2. Tính khối lượng của một thanh vật chất

a. Giả sử có một thanh vật chất đặt trên trục Ox từ điểm A tới điểm B.



Nếu thanh vật chất là đồng chất thì tỉ khối ρ của nó không đổi và khối lượng của thanh được tính đơn giản, từ công thức: $m = \rho.l$ (trong đó l là độ dài của thanh, ở đây là b - a).

Nếu thanh là không đồng chất thì tỉ khối phụ thuộc vị trí các điểm trên thanh (xem như hàm số của x) : $\rho(x)$. Từ điểm x ta tách ra một phần tử vi phân Δx, khối lượng tương ứng với nó là Δm. Trên phần tử vi phân này có thể xem thanh là đồng chất, có mật độ $\rho(x)$, khi đó: $\Delta m = p(x)\Delta x$. Từ đó $m = \int_a^b \rho(x)dx.$

b. Khối lượng của một bản phẳng hay một vật thể nếu nó là đồng chất thì khối lượng của chúng đơn giản là

$M = \rho s$ hoặc $M = \rho V$.

Trong đó ρ là tỉ khối (không đổi), S là diện tích bản phẳng, V là thể tích vật thể.

Đặc biệt nếu $\rho = 1$ thì số đo của khối lượng đơn thuần là số đo của diện tích hoặc thể tich. Khi đó, bài toán về khối lượng có thể dẫn đến bài toán về mômen tĩnh.

3. Tính mômen tĩnh của bản phẳng đồng chất

Mômen tĩnh đối với một trục của hệ n chất điểm có khối lượng $m_1, m_2, ..., m_n$ nằm trên một mặt phẳng đi qua trục đó là:

$k = \sum_i m_i d_i$. Trong đó d_i là " khoảng cách đại số" tương ứng từ các điểm đó tới trục; d_i lấy giá trị dương nếu chất điểm ở một bên của trục, lấy giá trị âm nếu chất điểm ở phía bên kia của trục. Bây giờ xem hệ điểm vật chất là một bản phẳng đồng chất.Muốn xác định mômen tĩnh K_x và K_y đối với các trục Ox, Oy của bản phẳng hình thang cong ABCD lập bởi đường cong $y = f(x), x \in [a, b]$, ta tách một phần tử của bản dưới dạng một bản thẳng đứng ứng với phần tử vi phân Δx. Xem bản đó gần đúng như hình chữ nhật, ta thấy khối lượng của nó đơn thuần là $y\Delta x$. Để xác định các vi phân mômen tĩnh dK_x và dK_y

tương ứng, ta xem khối lượng của nó tại tâm G_o của hình chữ nhật.

Theo hình vẽ, G_0 có hoành độ $x+\frac{1}{2}\Delta x$, tung độ $\frac{1}{2}y$; vì Δx là một phần tử vi phân, có thể bỏ qua đại lượng $\frac{1}{2}\Delta x$ khi tính dK_y.

Cuối cùng ta có:

$$\Delta K_x = \frac{1}{2}y^2\Delta x,\ \Delta K_y = xy\Delta x$$

Và $K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,\ K_y = \int_a^b xydx$

Trong đó $y = f(x)$ biểu thị phương trình của đường cong giới hạn phía trên của toàn bản.

KẾT LUẬN

Chúng ta có thể sử dụng phương pháp tích phân để tính giá trị các đại lượng biến thiên không đều như tính độ dài đường cong, tính khối lượng của một thanh vật chất không đồng chất hay tính mômen tĩnh của một bản phẳng đồng chất, ngoài ra còn nhiều ứng dụng khác của tích phân. Mỗi khi gặp ta đều lập một quy trình tính toán như trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ôn Ngũ Minh - Phạm Thị Thu Hằng. *Bài giảng học phần Toán 2.* Thái Nguyên, 2012.

[2] Nguyễn Đình Trí . *Toán học cao cấp*. NXB *Giáo dục,* H.2008.

[3] James Stewart. *Multivariable.Calculus. 7th.Edition.*

SUMMARY

Integral method has significance in calculating the value of the variable quantity irregularities, especially with the problem as the length curve, calculate the volume of a sound material or calculation static torque of the homogeneous plane. When should compute a quantity depends on another quantity variation on a segment we use integral method.

Keywords Integration method, variable quantities irregular.

MỘT SỐ VÍ DỤ ÁP DỤNG TÍCH PHÂN GIẢI BÀI TOÁN VẬT LÝ

Phạm Thị Minh Hạnh

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Bài báo trình bày một số ví dụ đơn giản trong Vật Lý (bài toán tìm quãng đường của một chuyển động cơ học, bài toán tính công, bài toán tính nhiệt lượng tỏa ra, bài toán tìm mômen quán tính...) được áp dụng trong quá trình giảng dạy nội dung tích phân bất định và tích phân xác định của học phần giải tích 1 tại trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp - Đại học Thái Nguyên. Bài báo giúp sinh viên thấy rõ hơn mối liên hệ giữa môn Toán và môn Vật Lý và cụ thể là thấy được ứng dụng của tích phân trong việc giải các bài tập Vật Lý. Từ đó sinh viên có hứng thú hơn khi học môn Toán cũng như có thể tiếp thu kiến thức môn Vật Lý được tốt hơn và qua đó góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy môn Toán tại trường đại học.

TỪ KHÓA: ứng dụng tích phân giải bài toán vật lý, giải vật lý bằng phương pháp tích phân...

NỘI DUNG

1. Giới thiệu

Toán học có vai trò quan trọng trong rất nhiều ngành khoa học. Đặc biệt trong chương trình đào tạo của các trường đại học nhất là khối các trường kỹ thuật thì toán học

là môn học cơ sở không những rèn luyện khả năng tư duy logic cho sinh viên mà còn giúp sinh viên có kiến thức nền tảng để dễ dàng tiếp thu lĩnh hội những kiến thức của các môn học cơ sở khác cũng như các môn học chuyên ngành. Tuy nhiên trong các giáo trình toán học cao cấp khi đưa ra các ví dụ minh họa hay các bài tập vận dụng thường chỉ là các ví dụ và bài tập mang tính chất toán đơn thuần nên sinh viên không thấy rõ được những ứng dụng và mối liên quan của kiến thức toán đối với các môn học khác. Từ đó dẫn đến tình trạng sinh viên có thể vận dụng kiến thức toán để làm tốt các bài tập toán song khi cần vận dụng kiến thức đó vào giải bài tập thuộc các môn học khác như vật lý, hóa học, cơ học ... thì sinh viên trở nên rất lúng túng. Nhận thức được vấn đề này tôi mạnh dạn bước đầu đưa vào một số ví dụ đơn giản của vật lý trong quá trình giảng dạy nội dung tích phân của học phần giải tích 1 nhằm nâng cao hiệu quả giảng dạy.

2. Một số ví dụ áp dụng tích phân để giải bài toán Vật lý

Ví dụ 1: Xác định quãng đường của chuyển động thẳng biến đổi đều biết vận tốc ban đầu của chuyển động tại thời điểm t = 0 là v_0

(Chuyển động thẳng biến đổi đều là chuyển động với gia tốc $\vec{a} = const$)

Giải: Ta có : $a = \frac{dv}{dt} = const \Rightarrow dv = adt$

Tích phân hai vế ta được:

$$\int dv = \int adt \Rightarrow v = a.t + C$$

Vì tại t = 0 thì $v = v_0$ nên thay vào biểu thức trên ta có: $v_0 = a.0 + C \Rightarrow C = v_0$

Suy ra $v = a.t + v_0$. Mặt khác:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow d\mathrm{s} = \left(a.t + v_0\right)dt$$

Tích phân hai vế ta được $s = \frac{1}{2}a.t^2 + v_0.t$

Ví dụ 2: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu bằng 0. Gia tốc biến đổi theo quy luật $a = 0,1t\left(m/s^2\right)$, t là thời gian kể từ lúc bắt đầu chuyển động . Hãy xác định quãng đường chuyển động sau nửa phút.

Giải:

Ta có : $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow dv = 0,1tdt$

Tích phân hai vế ta được:

$$\int dv = \int 0,1tdt \Rightarrow v = 0,1.\frac{t^2}{2} + C$$

Vì tại t = 0 thì $v = 0$ nên thay vào biểu thức trên ta có: $0 = 0,1.0 + C \Rightarrow C = 0$

Suy ra $v = 0,1.\frac{t^2}{2}$

Mặt khác: Ta có

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow d\mathrm{s} = \left(0,1.\frac{t^2}{2}\right)dt$$

Tích phân hai vế ta được $s = 0,1\frac{t^3}{6}$

Vậy quãng đường chuyển động mà vật đi được sau nửa phút (t=30(s)) là S = 450 (m).

Ví dụ 3: Một đoàn tàu chuyển động trên một đường thẳng nằm ngang với vận tốc không đổi v_0. Vào thời điểm đó người ta tắt máy. Lực hãm và lực cản tổng hợp của cả đoàn tàu bằng 1/10 trọng lượng P của nó. Hãy xác định chuyển động của đoàn tàu từ khi tắt máy và hãm.

Giải:

Khảo sát đoàn tàu như một chất điểm có khối lượng m, chịu tác dụng của $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}$

Phương trình động lực học: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$

Chiếu lên trục Ox nằm ngang, chiều (+) theo chiều chuyển động, gốc thời gian lúc tắt

máy ta được: $ma = -F = -\frac{P}{10} \Rightarrow a = -\frac{g}{10}$

Hay $\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{10} \Rightarrow dv = -\frac{g}{10}dt$

Tích phân hai vế ta được:

$$\int dv = \int -\frac{g}{10}dt \Rightarrow v = \frac{-g}{10}.t + C_1$$

Vì tại t = 0 thì $v = v_0$ nên thay vào biểu thức trên ta có: $C_1 = v_0$

Mặt khác: Ta có

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow dx = \left(\frac{-g}{10}t + v_0\right)dt$$

Tích phân lần nữa ta được

$$x = \frac{-g}{20}t^2 + v_0.t + C_2$$

Vì tại t = 0 thì $x = 0$ nên thay vào biểu thức trên ta có: $C_2 = 0$. Vậy $x = \frac{-g}{20}t^2 + v_0.t$.

Ví dụ 4: Đặt vào đoạn mạch một hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0.\sin\frac{2\pi}{T}t$.

Khi đó mạch có dòng điện xoay chiều $i = I_0.\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ với φ là độ lệch pha giữa dòng điện và hiệu điện thế. Tính công của dòng điện xoay chiều thực hiện trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kỳ.

Giải:

Ta có: $P = \frac{dA}{dt} \Rightarrow dA = u.idt \Rightarrow A = \int_0^T uidt$

$$\Rightarrow A = \int_0^T U_0 I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)\sin\frac{2\pi}{T}tdt$$

$$= U_0 I_0 \int_0^T \frac{1}{2}\left(\cos\varphi - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right)\right)dt$$

$$= \frac{U_0 I_0}{2}\left(t\cos\varphi - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t + \varphi\right)\right)\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{U_0 I_0}{2}T\cos\varphi$$

Ví dụ 5: Một dòng điện xoay chiều $i = I_0.\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ chạy qua một đoạn mạch có điện trở thuần R. Hãy tính nhiệt lượng Q tỏa ra trên đoạn mạch đó trong thời gian một chu kỳ T

Giải: Ta có

$$Q = \int_0^T Ri^2\,\mathrm{dt} = \int_0^T RI_0{}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)dt$$

$$= \frac{RI_0{}^2}{2}\int_0^T\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + 2\varphi\right)\right)dt$$

$$= \frac{RI_0{}^2}{2}\left(t - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t + 2\varphi\right)\right)\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{RI_0{}^2}{2}T$$

Ví dụ 6: Cho n mol khí lý tưởng đơn nguyên tử có nhiệt dung C phụ thuộc vào nhiệt độ tuyệt đối T theo hệ thức eq $C = \alpha + \beta T$ trong đó α, β là hằng số. Tính nhiệt lượng cần truyền cho khí để nó tăng từ nhiệt độ T_1 đến T_2

Giải: Liên quan đến nhiệt lượng và nhiệt dung ta có công thức:

$$C = \frac{dQ}{dT} \Rightarrow dQ = CdT \Rightarrow dQ = (\alpha + \beta T)dT$$

$$\Rightarrow \int_0^Q dQ = \int_{T_1}^{T_2}(\alpha + \beta T)dT$$

$$\Rightarrow Q = \left(\alpha T + \beta\frac{T^2}{2}\right)\Bigg|_{T_1}^{T_2}$$

$$= \alpha(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2}(T_2 - T_1)^2$$

Ví dụ 7: Một mạch kín gồm một nguồn điện có suất điện động biến thiên theo thời gian $E = 10\cos(100\pi t)$ và điện trở trong không đáng kể nối với mạch ngoài có một điện trở $R = 50\Omega$. Viết biểu thức cường độ dòng điện trong mạch tại thời điểm t và tính điện lượng

chuyển qua điện trở và nhiệt lượng tỏa ra trên điện trở trong thời gian từ $t = 0$ đến $t = \frac{1}{600}(s)$

Giải: Áp dụng định luật Ôm cho toàn mạch ta có

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10\cos(100\pi t)}{50} = 0,02\cos(100\pi t)$$

Mặt khác ta có $I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = Idt$

$$\Rightarrow dq = 0,02\cos(100\pi t)\,dt$$

$$\int_0^q dq = 0,02\int_0^{\frac{1}{600}} \cos(100\pi t)dt$$

$$\Rightarrow q = \frac{-0,02}{100\pi}\sin(100\pi t)\Big|_0^{1/600} \approx -3,18.10^{-5}(C)$$

Ví dụ 8: Tính moment quán tính của một đĩa tròn đồng chất khối lượng m = M, bán kính r = R đối với trục quay đi qua tâm đĩa và vuông góc với mặt phẳng đĩa.

Giải: Ta có công thức

$$dI = r^2 dm$$

$$dm = \rho d\mathrm{s} \Rightarrow \rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$d\mathrm{s} = 2\pi r d\mathrm{r}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \pi \frac{R^4}{2}.\frac{M}{\pi R^2} = \frac{MR^2}{2}$$

KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra 8 ví dụ đơn giản trong Vật Lý sử dụng tích phân để giải bài toán. Thông qua đó giúp ta thấy được ứng dụng và mối liên quan của kiến thức Toán đối với môn Vật lý và có thể mở rộng hơn là với các môn học khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Vũ Thị Hồng Hạnh (2013) - *Bài giảng Cơ học*, Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên

[2] Nguyễn Thị Kim Huyền (2011) - *Tích phân xác định và ứng dụng trong hình học và vật lý - Đại học Đà Nẵng.*

[3] Đồng Thị Linh (2014) - *Đề cương bài giảng vật lý 1*, Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp - ĐHTN.

SUMMARY

This article presents some simple examples in Physics (finding the way of a mechanical movement problem, calculate work problem, calculate heat generated problem, finding moments of inertia problem, etc.) applied in the process of indeterminate integral and definite integral teaching content of analytic 1 at Thai Nguyen University of Technology .The article not only gives students a clearer look on the relationship between Mathematics and Physics but also shows the application of integral in solving Physics exercises. Thus, students are more interested in learning Mathematics which leads to better knowledge at Physics that thereby contributes to improving the quality of teaching Mathematics at university.

Key words: the application of integral in solving Physics exercises, solve physics exercises by using integral methods, the relationship between Mathematics and Physics, Mathematics methods, etc.

ỨNG DỤNG CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRONG VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Nguyễn Thị Huệ

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Trong giáo trình toán 3 đã đưa ra các phương pháp để giải bài toán cực trị không điều kiện và cực trị có điều kiện rất cụ thể. Tuy nhiên với một bài toán cực trị có thể có nhiều cách giải và tiếp cận khác nhau. Bài tham luận này tác giả sẽ trình bày cách giải một số bài toán cực trị áp dụng việc xác định dấu của dạng toàn phương.

Từ khóa: cực trị hàm nhiều biến, dạng toàn phương.

NỘI DUNG

1) Phân loại dạng toàn phương

Định nghĩa. Dạng toàn phương φ(x,x)

i) Xác định dương nếu

$\varphi(x,x)>0 \ \forall x\in V, x\neq 0$

ii) Nửa xác định dương nếu

$\varphi(x,x)\geq 0 \ \forall x\in V, x\neq 0$

iii)Xác định âm nếu

$\varphi(x,x)<0 \ \forall x\in V, x\neq 0$

iv)Nửa xác định âm nếu

$\varphi(x,x)\leq 0 \ \forall x\in V, x\neq 0$

v) Dấu không xác định nếu nó có thể dương cũng như âm

Định lý 1 . Giả sử Q(x,x) là một dạng toàn phương trong cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid n chiều với ma trận đối xứng A có các giá trị riêng λ_k (k = 1, 2, .., n).

Khi đó dạng toàn phương sẽ là:

i) Xác định dương khi và chỉ khi $\lambda_k > 0$ với mọi $1\leq k \leq n$.

ii) Nửa xác định dương khi và chỉ khi $\lambda_k \geq 0$ với mọi $1\leq k \leq n$.

iii) Xác định âm khi và chỉ khi $\lambda_k < 0$ với mọi $1\leq k \leq n$.

iv) Nửa xác định âm khi và chỉ khi $\lambda_k \leq 0$ với mọi $1\leq k \leq n$.

Không xác định dấu khi và chỉ khi có hai trị riêng trái dấu.

Định lí 2 (tiêu chuẩn Sylvester). Cho A là ma trận của dạng toàn phương Q đối với một cơ sở nào đó của V.

(i) Q xác định dương khi và chỉ khi với mọi định thức con góc trái trên của A có giá trị dương

(ii) Q xác định âm khi và chỉ khi với mọi định thức con góc trái trên của A cấp lẻ có giá trị âm, cấp chẵn có giá trị dương

2. Điều kiện cần và đủ của cực trị

Điều kiện cần: Nếu hàm f(x,y) đạt cực trị tại (x_0, y_0) thì $f_x^{'}(x_0,y_0)=f_y^{'}(x_0,y_0)=0$

Điều kiện đủ: Nếu hàm f(x,y) liên tục trong lân cận s của điểm $M_0(x_0,y_0)$, có

$f_x^{'}(x_0,y_0)=f_y^{'}(x_0,y_0)=0$,

$f_{x^2}^{''}(x,y), f_{y^2}^{''}(x,y), f_{xy}^{''}(x,y)$ liên tục trong s và $d^2f(x_0,y_0)\neq 0$ thì $d^2f(x_0,y_0)>0$, nên hàm đạt cực tiểu tại (x_0, y_0). Nếu $d^2f(x_0,y_0)<0 \Rightarrow$ hàm đạt cực đại tại (x_0, y_0)

3. Giải bài toán tìm cực trị không điều kiện

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số

$z=6x^3y^2-x^4y^2-x^3y^3 \quad (x,y>0)$

Giải. Điểm dừng của hàm được xác định từ hệ

$$\begin{cases} z_x^{'}=18x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0 \\ z_y^{'}=12x^3y-2yx^4-3x^3y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_x^{'}=x^2y^2(18-4x-3y)=0 \\ z_y^{'}=x^3y(12-2x-3y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow M(3,2)$$

$$d^2z(x,y)=(36xy^2-12x^2y^2-6xy^3)dx^2$$
$$+(12x^3-2x^4-6x^3y)dy^2$$
$$+2(36x^2y-8x^3y-9x^2y^2)dxdy$$
$$\Rightarrow d^2z(M)=-144dx^2-216dxdy-162dy^2$$

Đây là một dạng toàn phương của các biến dx, dy có ma trận $A=\begin{bmatrix}-144 & -108\\ -108 & -162\end{bmatrix}$

Ta thấy $|A_1|=|-144|=-144<0$,

$|A|=\begin{vmatrix}-144 & -108\\ -108 & -162\end{vmatrix}=11664>0$

nên dạng toàn phương xác định âm theo tiêu chuẩn Sylvester.

Vậy hàm đạt cực đại tại M và $z_{CĐ}$= 108

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm

$u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$

Giải.

Điểm dừng của u được xác định từ hệ

$$\begin{cases}u_x^{'}=2x-y+1=0\\ u_y^{'}=2y-x=0\\ u_z^{'}=2z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow M(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$$

$d^2u(x,y,z)=2dx^2+2dy^2+2dz^2-2dxdy$

$\Rightarrow d^2u(M)=2dx^2+2dy^2+2dz^2-2dxdy$

Đây là một dạng toàn phương của các biến dx, dy,dz có ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

Ta thấy $|A_1|=|2|=2>0$,

$|A_2|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3>0$,

$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6>0$

nên dạng toàn phương xác định dương theo tiêu chuẩn Sylvester.

Vậy hàm đạt cực tiểu tại M và $u_{CT}=-\frac{4}{3}$

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm

$$u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}\quad (x,y,z>0)$$

Giải. Điểm dừng của u được xác định từ hệ

$$\begin{cases}u_x^{'}=1-\frac{y^2}{4x^2}=0\\ u_y^{'}=\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0\\ u_z^{'}=\frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{2x}=1\\ \frac{z^2}{y^2}=1\\ \frac{z}{y}-\frac{1}{z^2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{2x}=1\\ \frac{z}{y}=1\\ \frac{1}{z^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow M(\frac{1}{2},1,1)$$

$d^2u(x,y,z)=\frac{y^2}{2x^3}dx^2+(\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3})dy^2$

$+(\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3})dz^2-2\frac{y}{2x^2}dxdy-2\frac{2z}{y^2}$dydz

$d^2u(M)=4dx^2+3dy^2+6dz^2-4dxdy-4dydz$

Đây là một dạng toàn phương của các biến dx, dy, dz, có ma trận $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{bmatrix}$

Ta thấy $|A_1|=|4|=4>0$,

$|A_2|=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=8>0$,

$|A|=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{vmatrix}=32$

nên dạng toàn phương xác định dương theo tiêu chuẩn Sylvester.

Vậy hàm đạt cực tiểu tại M và $u_{CT}=4$

4. Giải bài toán tìm cực trị có điều kiện

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm $z=x^2+y^2$ với điều kiện 3x+2y= 6

Giải. Lập hàm nhân tử Lagrange:

$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda(3x+2y-6)$

Giải hệ:

$$\begin{cases} F_x^{'} = 2x + 3\lambda = 0 \\ F_y^{'} = 2y + 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) \\ \lambda = \frac{12}{13} \end{cases}$$

$$d^2F(x,y) = 2dx^2 + 2dy^2$$

$$\Rightarrow d^2F(M) = 2dx^2 + 2dy^2$$

Đây là biểu thức dạng toàn phương xác định dương (theo định nghĩa hoặc định lí 1)

Vậy hàm đạt cực tiểu tại M và $z_{CT} = \frac{36}{13}$

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm u= x+ y+ z với điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Giải. Lập hàm Lagrange:

$$F(x,y,z) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$$

Gải hệ:

$$\begin{cases} F_x^{'} = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ F_y^{'} = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ F_z^{'} = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \lambda \\ y^2 = \lambda \\ z^2 = \lambda \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} M_1(3,3,3) \\ \lambda_1 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} M_2(-1,1,1) \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} M_3(1,-1,1) \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} M_4(1,1,-1) \\ \lambda_4 = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ta có:

$$d^2F(x,y,z) = \frac{2\lambda}{x^3}dx^2 + \frac{2\lambda}{y^3}dy^2 + \frac{2\lambda}{z^3}dz^2$$

Xét tại các điểm:

+) $d^2F(M_1) = \frac{18}{3}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$

Đây là biểu thức dạng toàn phương xác định dương theo định nghĩa nên hàm đạt cực tiểu tại M_1 và u_{CT}= 9

+) $d^2F(M_2) = 2(-dx^2 + dy^2 + dz^2)$

Đây là biểu thức dạng toàn phương không xác định dấu theo định lí 1 nên hàm không đạt cực trị tại M_2

+) $d^2F(M_3) = 2(dx^2 - dy^2 + dz^2)$

Đây là biểu thức dạng toàn phương không xác định dấu theo định lí 1 nên hàm không đạt cực trị tại M_3

+) $d^2F(M_4) = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$

Đây là biểu thức dạng toàn phương không xác định dấu theo định lí 1 nên hàm không đạt cực trị tại M_4

KẾT LUẬN

Bài tham luận đã trình bày phương pháp giải một số bài toán cực trị bằng cách áp dụng xác định dấu của dạng toàn phương. Đây là một phương pháp khá hữu hiệu khi giải các bài toán cực trị không điều kiện và bài toán cực trị có điều kiện, đặc biệt là cực trị không điều kiện của hàm nhiều hơn hai biến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Bình- *Bài tập giải tích 1*- NXB Khoa học và kĩ thuật, 2009

[2] Nguyễn Đình Trí- *Toán học cao cấp tập 1*- NXB Giáo dục, 2004

[3] Nguyễn Đình Trí- *Toán học cao cấp tập 3*- NXB Giáo dục, 2004

SUMMARY

"Analysis 2" gave methods to solve conditional extremes and unconditional extremes very specific. However with an extreme problem can have multiple solutions and different approaches. This paper will present some solutions applied extreme identifying marks of quadratic form to find extreme of functions of several variables.

Keywords: Extreme of functions of several variables, quadratic form

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ ỨNG DỤNG MA TRẬN ĐỂ XÉT TÍNH ỔN ĐỊNH TRONG DẠY TOÁN CAO CẤP

Nguyễn Thị Minh Ngọc

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Ma trận và các phép toán của ma trận là một nội dung quan trọng được giảng dạy cho hầu hết sinh viên năm thứ nhất của các trường đại học. Tuy nhiên các ứng dụng của ma trận trong nhiều giáo trình toán cao cấp chủ yếu được các tác giả trình bày trong lĩnh vực toán học. Trong khuôn khổ bài viết này sẽ giới thiệu thêm một số ứng dụng trong các lĩnh vực khác của ma trận như kinh tế, đất đai, dân số, đặc biệt hướng đến xét tính ổn định nhằm giúp sinh viên có một cái nhìn khái quát hơn và thấy được sự ứng dụng rộng rãi của khái niệm này trong nhiều lĩnh vực.

Từ khóa: ma trận, ứng dụng, ma trận chuyển dịch, trạng thái ổn định, ma trận trạng thái ban đầu…

NỘI DUNG

Trong hầu hết các giáo trình Toán cao cấp dành cho sinh viên đại học năm thứ nhất, chúng ta có thể dễ dàng bắt gặp những ứng dụng trong toán học của ma trận [4] như

- Giải và biện luận một hệ phương trình tuyến tính tổng quát.
- Xác định cơ sở, số chiều của không gian con sinh bởi một họ vectơ.
- Xác định cơ sở, số chiều không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính.
- Các bài toán liên quan đến ma trận chuyển cơ sở.…v…v…

Tuy nhiên ứng dụng của ma trận trong các lĩnh vực khác lại ít được đề cập đến. Do nhu cầu của mỗi một chuyên ngành đào tạo nên ma trận có thể được sử dụng trong nhiều tình huống khác nhau. Đặc biệt, một khía cạnh ứng dụng của ma trận rất được quan tâm đến trong toán học, kinh tế, đất đai, dân số… đó là tính ổn định. Người ta quan tâm đến liệu khi nào thì một đối tượng, một hiện tượng sẽ đạt đến trạng thái ổn định, nghĩa là trạng thái mà qua một thời gian khá dài sau đó tỷ lệ giữa các thành phần trong nó luôn được duy trì cân bằng và không có nhiều biến động. Sự ổn định có vai trò rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực, người ta luôn tìm đến trạng thái ổn định và những biện pháp để duy trì lâu dài được trạng thái đó.

Sau đây là một số ví dụ với số liệu được lấy từ thực tế và được trình bày trong một số tài liệu của nước ngoài:

Ví dụ 1 [1] **(Lĩnh vực kinh tế):** Một công ty A sản xuất nước ngọt đang chiếm được 63% thị trường trong nước. Tuy nhiên, họ không vui vì có đến 37% thị trường bị chia sẻ cho các đối thủ cạnh tranh khác. Họ tiến hành điều tra thực tế thì nhận thấy, cứ mỗi tuần có 80% khách hàng ở lại với họ và 20% chuyển sang mua của đối thủ, trong khi đó có 30% khách hàng chuyển từ công ty đối thủ sang dùng sản phẩm của công ty A.

Chúng ta có thể dễ dàng nhận thấy

- Những người mua A vào tuần này, 80% sẽ tiếp tục mua vào tuần tới.
- Những người mua A vào tuần này, 20% sẽ mua nhãn hàng khác vào tuần tới.
- Những người mua nhãn hàng khác vào tuần này, 30% sẽ mua A vào tuần tới.
- Những người mua nhãn hàng khác vào tuần này, 70% sẽ tiếp tục mua nhãn hàng khác vào tuần tới.

[5] Ta có thể dùng ma trận đê mô hình hóa toán học bài toán kinh tế trên như sau

		Mua tuần tới	
		Công ty A	Công ty khác
Mua tuần này	Công ty A	80%	20%
	Công ty khác	30%	70%

Bảng 1. Sự chuyển dịch về thị trường so sánh giữa hai tuần

Khi đó ma trận chuyển dịch thể hiện sự biến động của thị trường qua mỗi tuần là

$$T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Dựa vào các số liệu này, có thể tính được sự thay đổi của thị trường trong tuần đầu tiên là

- Tỷ lệ khách hàng ở lại với A là 0.63 x 0.8 (80% của 63%).
- Tỷ lệ khách hàng mới đến với A là 0.37 x 0.3 (30% của 37%).

  Vậy tổng khách mua A sau 1 tuần là 0.63 x 0.8 + 0.37 x 0.3.
- Tỷ lệ khách hàng ở lại với sản phẩm khác là 0.37 x 0.7 (70% của 37%).
- Tỷ lệ khách hàng chuyển đến sản phẩm khác là 0.63 x 0.2 (20% của 63%).

  Vậy tổng khách của công ty khác trong 1 tuần là 0.63 x 0.2 + 0.37 x 0.7.

Gọi $S_0 = (0.63 \quad 0.37)$ là ma trận ổn định ban đầu. Khi đó sự biến đổi của thị trường trong tuần đầu tiên có thể được thể hiện thông qua phép nhân ma trận sau

$$S_1 = S_0.T = (0.63 \quad 0.37)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$= (0.63 \times 0.8 + 0.37 \times 0.3 \quad 0.63 \times 0.2 + 0.37 \times 0.7)$$

$$= (0.615 \quad 0.385)$$

Hoặc S_0 có thể được viết theo dạng vectơ cột, nghĩa là

$$S_1 = T.S_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.63 \\ 0.37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.615 \\ 0.385 \end{pmatrix}$$

Tiếp tục phương pháp như trên, ta nhận được tỷ lệ khách hàng sau 2 tuần là

$$S_2 = S_1.T = (0.615 \quad 0.385)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$= (0.6075 \quad 0.3925)$$

(Với giả sử sức mua là không đổi ta thấy sau 2 tuần có 60.75% khách hàng sẽ mua A và 39.25% khách hàng sẽ mua của công ty khác).

Tương tự, sau 3 tuần ta có

$$S_3 = S_2. = (0.6075 \quad 0.3925)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$= (0.60375 \quad 0.39625)$$

Sau 4 tuần

$$S_4 = S_3.T$$

$$= (0.60375 \quad 0.39625)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$= (0.601875 \quad 0.398125)$$

Sau 5 tuần

$$S_5 = S_4.T$$

$$= (0.601875 \quad 0.398125)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$= (0.6009375 \quad 0.3990625)$$

Ta có thể nhận thấy khi n càng lớn thì $S_n \approx S_{n+1}$, nghĩa là thị trường dần tiến đến trạng thái ổn định, theo các con số ở trên thì sau 5 tuần thì thị trường của A giảm còn khoảng 60%, còn thị trường của các nhãn hàng khác tăng lên đến khoảng 40%.

Từ ma trận chuyển dịch $T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ ta có

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix};$$

$$T^4 = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.5625 & 0.4375 \end{pmatrix};$$

$$T^8 = \begin{pmatrix} 0.6016 & 0.3984 \\ 0.5977 & 0.4023 \end{pmatrix}$$

$$T^{16} = \begin{pmatrix} 0.6000 & 0.4000 \\ 0.6000 & 0.4000 \end{pmatrix}$$

Giả sử thị trường ổn định với

$S_\infty = (a \quad b)$.

Với giả thiết a là tỷ lệ trong nhóm 1, b là tỷ lệ trong nhóm 2, ta luôn có $a + b = 1$

Ta có

$$S_\infty = S_\infty.T$$

$$\Leftrightarrow (a \quad b)\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix} = (a \quad b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0.8a + 0.3b = a\\ 0.2a + 0.7b = b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3}a\\ a + b = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = 0.6\\ b = 0.4\end{cases}$$

Vậy cũng nhận được kết quả như trên.

Ví dụ 2 [2] (Lĩnh vực đất đai): Một kế hoạch đầy tham vọng của các nhà khoa học là làm đảo ngược ảnh hưởng do sự phá hủy của muối ở vùng đất dọc sông Murray (Australia). Họ đã có những ví dụ về cải tạo chất lượng đất ở Mỹ và tin rằng công nghệ tương tự sẽ có tác dụng trong việc cải tạo đất ở phía Bắc Australia. (Dữ liệu được sưu tầm và lấy từ năm 2005).

	Năm sau			
Năm nay		Rất tốt	Sử dụng được	Bạc màu
	Rất tốt	0.91	0.06	0.03
	Sử dụng được	0.3	0.65	0.05
	Bạc màu	0.02	0.28	0.7

Bảng 2. Số liệu so sánh chất lượng đất giữa hai năm

a) Viết ma trận chuyển dịch.

b) Giải thích ý nghĩa các con số 0.91; 0.03; 0.28.

c) Tìm T^2 và giải thích con số ở:
i) Dòng 2 cột 1. ii) Dòng 3 cột 3.

d) Ma trận chất lượng đất đai ban đầu là $(0 \quad 0.1 \quad 0.9)$. Giải thích ý nghĩa ma trận này.

e) Chất lượng đất đai như thế nào sau
i) 1 năm ii) 2 năm iii) 4 năm

f) Trạng thái ổn định ở đây là gì?

Lời giải:

a) $T = \begin{pmatrix}0.91 & 0.06 & 0.03\\ 0.3 & 0.65 & 0.05\\ 0.02 & 0.28 & 0.7\end{pmatrix}$

b) Nhìn vào các con số này ta có thể biết được, có 91% đất rất tốt vào năm nay sẽ rất tốt vào năm sau; 3% đất rất tốt vào năm nay sẽ bạc màu vào năm sau; 28% đất bạc màu vào năm nay sẽ sử dụng được vào năm sau.

c) $T^2 =$

$$\begin{pmatrix}0.91 & 0.06 & 0.03\\ 0.3 & 0.65 & 0.05\\ 0.02 & 0.28 & 0.7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0.91 & 0.06 & 0.03\\ 0.3 & 0.65 & 0.05\\ 0.02 & 0.28 & 0.7\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0.8467 & 0.1020 & 0.0513\\ 0.4690 & 0.4545 & 0.0765\\ 0.1162 & 0.3792 & 0.5046\end{pmatrix}$$

Số 0.4690 ở dòng 2 cột 1 nghĩa là 46.9% đất sử dụng được của năm nay sẽ rất tốt trong 2 năm tới; số 0.5046 ở dòng 3 cột 3 nghĩa là 50.46% đất bạc màu của năm nay sẽ tiếp tục bạc màu trong 2 năm tới.

d) Theo ma trận này thì có 0% đất rất tốt, 10% đất sử dụng được và 90% đất bạc màu.

e) i) Ta có

$$(0 \quad 0.1 \quad 0.9).T$$
$$= (0 \quad 0.1 \quad 0.9).\begin{pmatrix}0.91 & 0.06 & 0.03\\ 0.3 & 0.65 & 0.05\\ 0.02 & 0.28 & 0.7\end{pmatrix}$$
$$= (0.048 \quad 0.317 \quad 0.635)$$

Như vậy sau 1 năm sẽ có 4.8% đất rất tốt; 31.7% đất sử dụng được và 63.5% đất vẫn còn bạc màu.

ii) $(0 \quad 0.1 \quad 0.9).T^2 =$

$$(0 \quad 0.1 \quad 0.9).\begin{pmatrix}0.8467 & 0.1020 & 0.0513\\ 0.4690 & 0.4545 & 0.0765\\ 0.1162 & 0.3792 & 0.5046\end{pmatrix}$$
$$= (0.1515 \quad 0.3867 \quad 0.4618)$$

Vậy sau 2 năm sẽ có 15.15% đất rất tốt; 38.67% đất sử dụng được và 46.18% đất bạc màu.

iii) $(0 \quad 0.1 \quad 0.9).T^4$

$= (0 \quad 0.1 \quad 0.9).\begin{pmatrix} 0.8467 & 0.1020 & 0.0513 \\ 0.4690 & 0.4545 & 0.0765 \\ 0.1162 & 0.3792 & 0.5046 \end{pmatrix}.$
$\begin{pmatrix} 0.8467 & 0.1020 & 0.0513 \\ 0.4690 & 0.4545 & 0.0765 \\ 0.1162 & 0.3792 & 0.5046 \end{pmatrix}$
$= (0.3633 \quad 0.3663 \quad 0.2704)$

Sau 4 năm sẽ có 36.33% đất rất tốt; 36.63% đất sử dụng được và 27.04 đất vẫn bạc màu.

f) Sử dụng Matlab ta tính được $T^{100} = \begin{pmatrix} 0.6952 & 0.2017 & 0.1031 \\ 0.6952 & 0.2017 & 0.1031 \\ 0.6952 & 0.2017 & 0.1031 \end{pmatrix}$

Vậy sau quá trình cải tạo liên tục, đất đai ở vùng này sẽ giữ được trạng thái ổn định ở mức 69.52% đất rất tốt; 20.17% đất sử dụng được và vẫn còn lại 10.31% đất bạc màu.

Ví dụ 3 [3] (Lĩnh vực dân số): Nghiên cứu một đàn chim cánh cụt thấy rằng mỗi năm có 80% con mái nhỏ chết. Đến cuối năm số chim non sống sót trưởng thành. Mỗi năm 1 con mái trưởng thành đẻ trung bình 4 trứng, mỗi quả trứng có xác suất 50% nở thành chim mái con. Một con mái có 60% cơ hội sống sót đến năm tiếp theo và đẻ trứng 1 lần nữa. Số lượng chim con và chim trưởng thành ở bất cứ thời điểm nào có thể được mô tả bởi ma trận $P = \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}$ và sự thay đổi số lượng hàng năm có thể được mô tả bởi ma trận $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$.

a) Giải thích ý nghĩa của T^nP với n là số nguyên dương.

b) Tính TP và T^2P nếu $P = \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix}$.

c) Tính T^5P và $T^{10}P$. Dự báo điều gì sẽ xảy ra với dân số của đàn chim này qua thời gian.

d) Sau một cơn bão chỉ còn vài con chim nhỏ sống sót, dân số còn lại là $P = \begin{pmatrix} 20 \\ 250 \end{pmatrix}$. Liệu số lượng của đàn chim có khả năng khôi phục lại không?

e) Xét $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng nếu MP = P thì ab = 1 – c.

f) Dự báo điều gì sẽ xảy ra với đàn chim cánh cụt này nếu thay đổi các điều kiện môi trường và ma trận T trở thành $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$. Đưa ra bằng chứng cho câu trả lời.

Lời giải:

a) T mô tả thay đổi dân số hàng năm.

TP là dân số sau 1 năm; T^2P là dân số sau 2 năm;…; T^nP là dân số sau n năm.

b) $TP = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 230 \end{pmatrix}$;

$T^2P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 460 \\ 258 \end{pmatrix}$

Nhìn vào các ma trận trên ta thấy sau 1 năm sẽ có 600 chim con và 230 chim trưởng thành và sau 2 năm sẽ có 460 chim con và 258 chim trưởng thành.

c) $T^5P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^5\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 502.6 \\ 249.5 \end{pmatrix}$;

d) $T^{10}P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 499.97 \\ 250.01 \end{pmatrix}$

Điều này cho thấy số lượng đàn ổn định là khoảng 500 con nhỏ và 250 con trưởng thành.

e) $T^{10}P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix} 20 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 362.8 \\ 181.4 \end{pmatrix}$;

f) $T^{20}P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 362.9 \\ 181.4 \end{pmatrix}$

Như vậy số lượng chim vẫn sẽ ổn định, nhưng ở mức thấp hơn, có nghĩa là số lượng không khôi phục được.

g) Nếu MP = P thì $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Suy ra $\begin{cases} x = ay & (1) \\ y = bx + cy & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) được

$y = b(ay) + cy \Rightarrow 1 = ab + c.$

h) Ma trận $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ có dạng $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ với a = 2; b = 0.2; c = 0.7

$\Rightarrow ab = 2.(0.2) = 0.4$ và $1 - c = 1 - 0.7 = 0.3$ (không thỏa mãn ab = 1 – c, vì vậy dân số không đạt được trạng thái ổn định). Cụ thể là

$$T^{10}P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 968.6 \\ 519.6 \end{pmatrix};$$

$$T^{11}P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^{11}\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1039 \\ 557.4 \end{pmatrix}$$

Với các con số trên có thể thấy khi thay đổi điều kiện môi trường thì dân số tăng nhanh.

KẾT LUẬN

Trong toán học và đời sống có rất nhiều lĩnh vực cần quan tâm đến sự ổn định, là thứ mà chúng ta luôn muốn đạt đến. Có cả một nhánh toán học nghiên cứu về sự ổn định với nhiều thành quả đã đạt được. Ở trình độ sinh viên năm thứ nhất đại học, người học cũng cần nắm được sơ bộ về khái niệm này thông qua những ví dụ cụ thể như trên, từ đó sẽ có điều kiện đi sâu hơn khi học các chuyên ngành có liên quan vào những năm học sau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] . Peter Lancaster and Miron Tismenetsky – *The theory of matrices with applications* – Second edition – Academic Press – 1985.

[2] . F.R.Gantmacher – *Applications of the theory of matrices* – Dover Publications, Inc, 31 East 2nd Street, Mineola, US – 2005.

[3]. Emmanuel J.Candes, Justin K. Romberg and Terence Tao – *Communications on Pure and Applied Mathematics* – 8/2006.

[4]. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh – *Toán học cao cấp - Tập 1* – Nhà xuất bản Giáo dục – 2003.

[5]. Nguyễn Mạnh Toàn – Mô hình cân đối liên ngành trong phân tích và dự báo sản lượng, thu nhập và việc làm - *Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Đà Nẵng* - Số 3(44).2011.

SUMMARY

Matrix and matrix operations is an important content is taught to most students the first year of university. However, the application of the matrix in many advanced math curriculum is primarily the author presents in the field of mathematics. In the framework of this article will introduce a number of applications in other areas such as economic matrix, land, population, particularly toward stability review to help students with an overview over and see the broad application of this concept in many areas.

Keywords: matrix, application, transformation matrix, the steady state, the matrix to its original state ...

MỘT SỐ CÁCH BIỂU DIỄN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

Phan Thị Vân Huyền

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Trong học tập và giảng dạy các học phần Toán tại trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên, chúng ta vẫn thường nghiên cứu về hàm số với cách biểu diễn truyền thống là: hàm số được cho dưới dạng một biểu thức của ẩn, tuy nhiên với các vấn đề thực tiễn thì hàm số phần lớn được xác định dưới dạng bảng số liệu hay đồ thị. Trong bài báo tác giả nêu ra 4 cách biểu diễn hàm số và một số ví dụ cụ thể để minh họa cho vấn đề này.

TỪ KHÓA: *hàm số, đối số, ẩn, bảng giá trị, đồ thị, biểu thức, giá trị, ...*

NỘI DUNG

Mọi vật xung quanh ta đều biến đổi theo thời gian. Chúng ta có thể nhận thấy điều đó qua sự chuyển động cơ học của các vật thể

t	0	2	4	6	8	10	12	14
$T(^oF)$	82	75	74	75	84	90	93	94

như: ô tô, xe máy; sự thay đổi của các đại lượng vật lý như: nhiệt độ, tốc độ, gia tốc; sự biến động kinh tế trong một xã hội như: giá cổ phiếu, lãi suất tiết kiệm; hay sự phát triển dân số của các quốc gia theo thời gian, … Tất cả các loại hình đó đều được gọi chung là hàm số, nó phụ thuộc vào đối số nào đó. Do vậy việc nghiên cứu về hàm số được đặt ra như một nhu cầu khách quan của con người và xã hội.

1. Khái niệm hàm số một biến số thực

Hàm số xuất hiện khi một đại lượng phụ thuộc vào một đối số nào đó, ví dụ:

a. Diện tích S của một hình tròn phụ thuộc vào bán kính r của nó theo công thức: $S = \pi r^2$, cứ mỗi giá trị của r cho ta một giá trị tương ứng của diện tích S và khi đó ta nói rằng S là một hàm số của r.

b. Điều tra về dân số của tỉnh Thái Nguyên từ năm 1995 đến năm 2002 ta thấy tổng số dân thay đổi theo từng năm, chẳng hạn tổng số dân của tỉnh Thái Nguyên năm 1995 là 1.005.000 người, năm 1996 là 1.020.600 người tức là nếu ta coi P là tổng số dân, t là thời gian thì ta có thể xác định

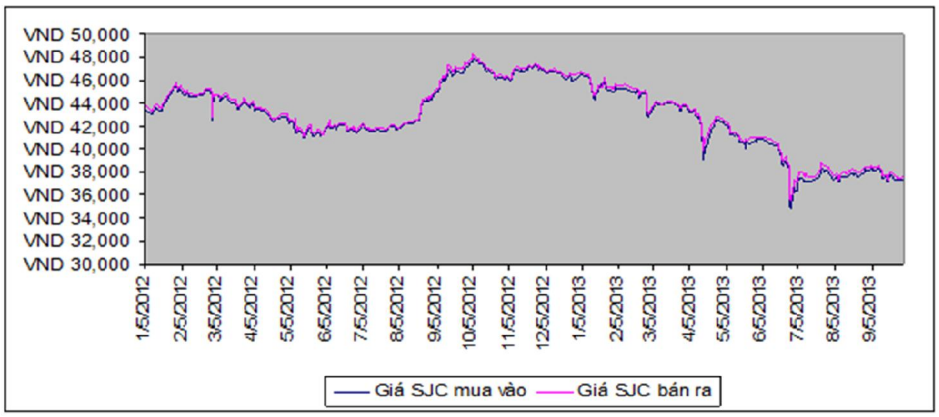
$$P(1995) \approx 1.005.000;$$

Như vậy với mỗi một giá trị của thời điểm t ta có một giá trị tương ứng của P và do vậy ta nói rằng P là một hàm số của t.

c. Đo nhiệt độ T (^oF) của một thành phố bắt đầu từ 12h đêm (tức 0h) đến 2h chiều (tức 14h) cùng ngày, cứ cách 2 giờ đồng hồ người ta lại đo một lần và nhận được bảng số liệu sau:

Dựa vào bảng số liệu ta thấy nhiệt độ T của thành phố phụ thuộc vào thời gian t, ví dụ $T(6) = 75$. Như vậy với mỗi một giá trị của thời điểm t ta có một giá trị tương ứng của T và do vậy ta nói rằng T là một hàm số của t.

d. Giá vàng trong nước thay đổi theo từng thời gian, tại mỗi thời điểm cụ thể ta xác định được giá vàng tương ứng do vậy giá vàng P cũng có thể coi là một hàm số của thời gian t. Ví dụ hình 1 là đồ thị ghi lại những biến động của giá vàng trong nước từ 01/05/2012 đến 01/05/2013, nhìn vào đồ thị ta có thể xác định được giá vàng tại từng thời điểm cụ thể.



***Hình 1**: Diễn biến giá vàng trong nước từ năm 01/05/2012 đến 09/05/3012* [4]

Định nghĩa: *Cho X, Y là hai tập hợp thuộc tập số thực* $\mathbb{R}$*, hàm số f xác định trên X, nhận giá trị trong Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi số x thuộc X với một số y duy nhất thuộc Y.*

Ký hiệu:

$$f: X \to Y, x \mapsto f(x) \text{ hoặc } y = f(x).$$

Trong đó:

- Tập *X* gọi là miền xác định.
- Tập *Y* gọi là miền giá trị.
- *x* gọi là biến độc lập hay còn gọi là đối số.
- *y* gọi là biến phụ thuộc hay còn được gọi là hàm số.
- *f(x)* được gọi là giá trị của hàm *f* tại *x*.

2. Một số cách biểu diễn hàm số một biến số thực

Có 4 cách biểu diễn hàm số là:

Hàm số được cho bởi một biểu thức cụ thể của ẩn.

Hàm số được cho dưới dạng bảng giá trị.

Hàm số được cho bởi đồ thị.

Hàm số được cho dưới dạng diễn tả bằng lời (hay bằng từ ngữ).

Một hàm số thì có thể được mô tả bằng cả 4 cách, từ một trong 4 dạng ta đều có thể suy ra các dạng mô tả còn lại của hàm số đó.

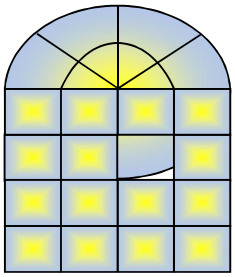
Do vậy tùy vào mục đích, hoàn cảnh mà chúng ta lựa chọn cách biểu diễn hàm số sao cho phù hợp và thuận lợi để giải quyết các vấn đề liên quan.

2.1. Hàm số được cho bởi một biểu thức cụ thể của ẩn

Đây là cách thức truyền thống chúng ta vẫn thường nghiên cứu, hàm số $y = f(x)$ được cho dưới dạng một biểu thức cụ thể cụ thể x là $f(x)$, ví dụ như hàm số $y = x^2 + 1$, $y = sin2x$, …

Trong 4 trường hợp nêu ra ở mục 1 thì ta thấy rằng trường hợp a về diện tích của hình tròn thì lựa chọn biểu diễn hàm số dưới dạng một biểu thức cụ thể của ẩn là phù hợp nhất, cụ thể hàm S (diện tích của hình tròn bán kính r) được xác định bởi: $S = \pi r^2$, trong đó miền xác định của hàm số là: $\{r | r > 0\} = (0, +\infty)$ và miền giá trị của hàm số cũng là $(0, +\infty)$.

Ví dụ 1: Cửa sổ của một ngôi nhà được thiết kế dưới dạng 16 hình vuông nhỏ có cạnh là x ghép lại với nhau và phía trên là nửa hình tròn như *hình 2*. Hãy xác định diện tích S của cửa sổ đó như là một hàm số của ẩn x.



Hình 2

Giải:

Diện tích của một hình vuông nhỏ là: x^2

Hình tròn phía trên có bán kính là: $2x$

$\Rightarrow$ diện tích của nửa hình tròn phía trên là:

$$\frac{1}{2}\pi.(2x)^2 = 2\pi x^2$$

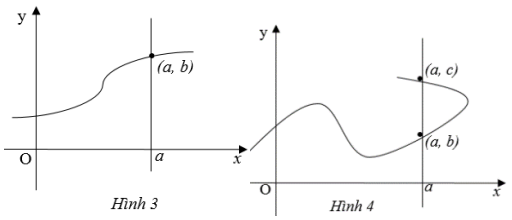
Do đó diện tích của cửa sổ là:

$S = 16x^2 + 2\pi x^2 = (16 + 2\pi)x^2$.

2.2. Hàm số được cho bởi đồ thị

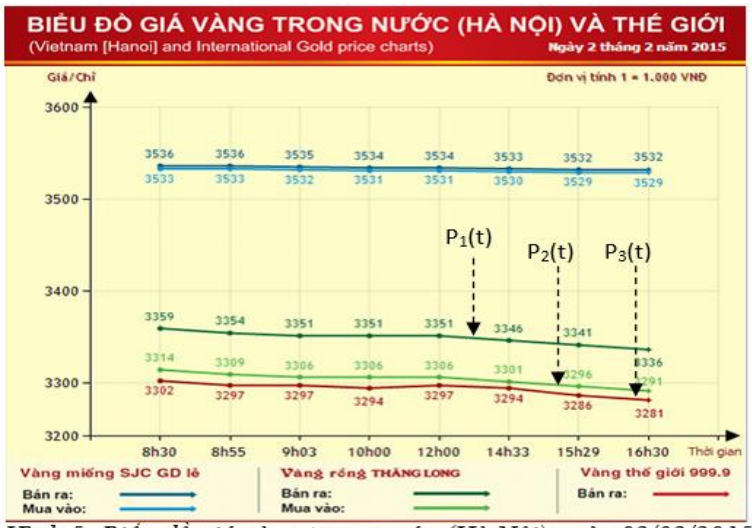
Trường hợp thứ 4 trong 4 trường hợp nêu ra ở mục 1 là một ví dụ về hàm số được cho bởi đồ thị, đương nhiên trong trường hợp này người ta có thể ghi chép lại những biến động của giá vàng vào một bảng số liệu, tuy nhiên bằng cách thể hiện trên đồ thị sẽ giúp ta có cái nhìn dễ dàng hơn về tăng giảm giá vàng như thế nào. Hơn nữa trên cùng một hệ tọa độ ta có thể vẽ đồ thị của nhiều hàm số giúp việc so sánh về tương quan đồ thị của các hàm số dễ dàng hơn, ví dụ như trong hình 1 thể hiện đồ thị của giá vàng SJC mua vào và giá vàng SJC bán ra trên cùng một hệ tọa độ từ đó giúp ta so sánh giữa giá vàng mua vào và bán ra một cách dễ dàng hơn.

Đồ thị của một hàm số thì được thể hiện trên hệ tọa độ tương ứng, chẳng hạn đồ thị của hàm số $y = f(x)$ được thể hiện trên hệ tọa độ Oxy. Đặt vấn đề ngược lại: Có phải mọi đường cong trong mặt phẳng đều là đồ thị của một hàm số? Để trả lời cho câu hỏi này chúng ta cùng xem lại định nghĩa về hàm số: *một hàm số $f: X \to Y$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi số x thuộc X với một số y duy nhất thuộc Y,* do đó một đường cong trong mặt phẳng Oxy là đồ thị của một hàm số của ẩn x khi và chỉ khi *đường thẳng vuông góc với trục Ox cắt đồ thị đó tại một điểm duy nhất.* (ví dụ như *Hình 3, hình 4*)



Đường cong trong hình 3 là đồ thị của một hàm số của ẩn x vì mọi đường thẳng $x = a$ đều cắt đường cong tại một điểm duy nhất nghĩa là với mỗi giá trị $x = a$ ta xác định được duy nhất một giá trị $y = b$ thỏa mãn $f(a) = b$. Còn đường cong trong hình 4 không phải là đồ thị của một hàm số của ẩn x vì theo hình vẽ đường thẳng $x = a$ cắt đường cong tại hai điểm (a, b) và (a, c) có nghĩa là tại $x = a$ ta xác định được 2 giá trị y tương ứng là $y = b$ và $y = c$.

Ví dụ 2. Cho biểu đồ giá vàng trong nước ngày 02/02/2015



Hình 5: Biểu đồ giá vàng trong nước (Hà Nội) ngày 02/02/2015

t	0	2	4	6	8	10	12	14
$T(^oF)$	82	75	74	75	84	90	93	94

Có thể thấy giá vàng/chỉ P là một hàm số của ẩn là thời gian t.

a, Hãy xác định giá vàng rồng Thăng Long bán ra, mua vào và giá vàng thế giới vào lúc 9h03.

b, Nhận xét về sự biến động của giá vàng thế giới trong ngày 02/02/2015.

Giải:

a, Nhìn vào đồ thị ta thấy :

Giá vàng rồng Thăng Long bán ra lúc 9h03 là: $P_1(9h30) = 3.351.000\ VNĐ/chỉ$.

Giá vàng rồng Thăng Long mua vào lúc 9h03 là: $P_2(9h30) = 3.306.000\ VNĐ/chỉ$.

Giá vàng thế giới lúc 9h03 là: $P_3(9h03) = 3.297.000\ VNĐ/chỉ$.

b. Giá vàng thế giới trong ngày 02/02/2015 cao nhất vào đầu giờ sáng, giữa buổi sáng và trưa đi ngang, chiều giảm nhẹ.

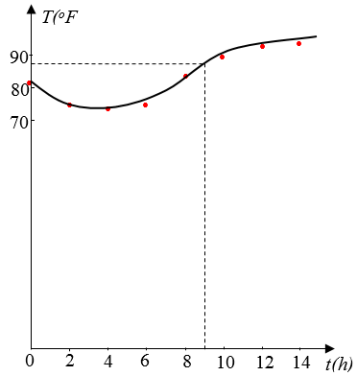
2.3. Hàm số được cho dưới dạng bảng giá trị

Rất nhiều bài toán thực tế, cũng như trong các lĩnh vực như vật lý, hóa học, địa lý, kỹ thuật, kinh tế, … hàm số được sử dụng đến dưới dạng bảng số liệu. Ví dụ như trong 4 trường hợp nêu ra ở mục 1 thì ta thấy rằng trường hợp c là hàm số được cho dưới dạng bảng số liệu. Trong trường hợp này khi ta vẽ các điểm trong bảng số liệu lên một hệ trục tọa độ thì từ đó ta có thể phác thảo được đồ thị của hàm số đó tương đối chính xác, từ đó giúp ta có thể ước lượng gần đúng giá trị của hàm số tại những giá trị khác của đối số ngoài những giá trị đã được đưa ra trong bảng số liệu.

Ví dụ 3. Đo nhiệt độ T (^oF) của một thành phố bắt đầu từ 12h đêm (tức 0h) đến 2h chiều (tức 14h) cùng ngày, cứ cách 2 giờ đồng hồ người ta lại đo một lần và nhận được bảng số liệu sau:

Dựa vào bảng số liệu trên hãy phác thảo đồ thị của hàm số và ước lượng nhiệt độ của thành phố lúc 9h.

Giải:



Xác định các điểm có tọa độ (0, 82); (2, 75); (4, 74); (6, 75); (8, 84); (10, 90); (12, 93); (14, 94) trong mặt phẳng tọa độ TOt (như hình vẽ) từ đó phác thảo được đồ thị của hàm số trên. Từ đồ thị ta có thể ước lượng nhiệt độ của thành phố lúc 9h là khoảng $P(9) \approx 87^0F$.

2.4. Hàm số được cho dưới dạng diễn tả bằng lời (hay bằng từ ngữ).

Trường hợp thứ 2 trong 4 trường hợp nêu ra ở mục 1 là một ví dụ về hàm số được cho dưới dạng diễn tả bằng lời. Dựa vào miêu tả ta có thể lập bảng giá trị hay xác định đồ thị của hàm số và cũng có thể xác định được gần đúng biểu thức cụ thể của hàm số (thực tế khó có thể xác định được biểu thức chính xác của hàm số, tuy nhiên có thể xác định được gần đúng biểu thức của hàm số bằng một số phương pháp cụ thể).

Ví dụ 4. Điều tra về dân số của tỉnh Thái Nguyên từ năm 1995 đến năm 2002 ta nhận được kết quả sau: [3] tổng số dân của tỉnh từ năm 1995 đến năm 2002 lần lượt là:1.005.000 người 1.020.600 người, 1.029.600 người, 1.038.500 người, 1.047.800 người, 1.055.500 người, 1.063.600 người, 1.071.000 người.

Với số liệu điều tra như trên ta có thể lập bảng giá trị cho số liệu như sau:

Năm	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Tổng số dân *(nghìn người)*	1005,0	1020,6	1029,6	1038,5	1047,8	1055,5	1063,6	1071

Nếu ta coi thời điểm năm 1995 là ứng với đối số $t = 0$ thì khi đó ta có tổng số dân P của thành phố Thái Nguyên được coi như là một hàm số của t và được cho dưới dạng bảng số liệu sau:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
P (nghìn)	1005,0	1020,6	1029,6	1038,5	1047,8	1055,5	1063,6	1071

Từ đó ta có thể phác họa đồ thị của hàm $P(t)$ (cách làm tương tự như ví dụ 3). Nhìn vào đó ta có thể thấy được dân số của tỉnh Thái Nguyên tăng dần theo từng năm và dựa vào đồ thị ta biết được tốc độ tăng dân số như thế nào.

KẾT LUẬN

Hàm số là một vấn đề rất quan trọng không chỉ trong toán học mà nó còn sinh ra để giải quyết rất nhiều các bài toán thực tế, trong khuôn khổ của một bài báo tác giả đã trình bày những nét đơn giản nhất của 4 cách biểu diễn một hàm số thông qua các ví dụ cụ thể, việc thể hiện một hàm số theo nhiều cách như vậy phần nào thể hiện được sự gần gũi của toán học với thực tiễn. Với các hàm số được cho dưới dạng bảng số liệu hay đồ thị chúng ta vẫn có thể giải quyết được các vấn đề khác liên quan đến hàm số như đạo hàm, tích phân, … của hàm số đó, tác giả hy vọng sẽ tiếp tục phát triển vấn đề này trong các nghiên cứu tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Jame Stewart, *Single Variable Canculus Early Transcendentals, Seventh Edition,* Copyright 2010 Cengage Learning.

[2] Ôn Ngũ Minh, *Bài giảng môn Toán 2*, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

[3] Website: http://www.gopfp.gov.vn/ (Tổng cục dân số - kế hoạch hóa gia đình).

[4] Website : https://luattaichinh.wordpress.com/ (Luật Tài chính – Ngân hàng).

[5] Website: http://www.btmc.vn

SUMMARY

When learning and teaching mathematical modules at the University of Industrial Engineering, we often study about funtions with their traditional performances that are the algebraic formulars. However real world problems are often represented by a table of values or by a graph. In this article, author give four different ways to represent a function: by an equation, in a table of values, by a graph, or in words and some examples illustrating those problems.

Keywords: *function, variable, table of values, graph, algebraic formular, value, ...*

TRỊ RIÊNG-VECTƠ RIÊNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Vũ Hồng Quân

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

Tóm tắt

Bài báo tập trung nghiên cứu tính chất của trị riêng véc tơ riêng của ma trận vuông cấp n va từ đó nêu ra một số ứng dụng quan trọng trong đại số tuyến tính như vấn đề ma trận nghịch đảo, đa thức ma trận…

Từ khóa: *ma trận, trị riêng, véctơ riêng, định thức, ma trận nghịch đảo…*

1. Giới thiệu

Đại số tuyến tính là một ngành toán học nghiên cứu về không gian vectơ, hệ phương trình tuyến tính và các phép biến đổi tuyến tính giữa chúng. Các khái niệm vectơ trong không gian vectơ, ma trận , định thức, trị riêng và véc tơ riêng là những công cụ rất quan trọng trong đại số tuyến tính. Các bài toán như phép quay trong không gian, nhận dạng đườngbậc hai, mặt bậc hai và tìm ma trận nghịch đảo là những bài toán có tầm quan trọng trong thực tế. Để giải các bài toán đó chúng ta có nhiều công cụ. Và một trong những công cụ hiệu quả chính là sử dụng trị riêng véc tơ riêng. Bài báo này tác giả minh họa điều đó.

2. Trị riêng, véctơ riêng và một số ứng dụng trong đại số tuyến tính

2.1 Trị riêng và véc tơ riêng

Số λ được gọi là trị riêng của ma trận vuông A nếu phương trình $Ax = \lambda x$ có nghiệm khác không, đồng thời véc tơ cột x đó được gọi là véc tơ riêng ứng với trị riêng λ.

Nhận thấy, nếu x là véc tơ riêng của A ứng với trị riêng λ thì với mọi $c \in R$, cx cũng là véc tơ riêng của A ứng với trị riêng λ. Thật vậy, $A(cx) = cAx = c\lambda x = \lambda(cx)$.

2.2 Phương trình đặc trưng

Ta viết lại phương trình $Ax = \lambda x$ dưới dạng $(A - \lambda E)x = \theta$. Do $x \neq \theta$ nên $\det(A - \lambda E) = 0$.

Phương trình $\det(A - \lambda E) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận vuông A và đa thức $\det(A - \lambda E)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A.

2.3 Tìm véc tơ riêng của ma trận

Không gian nghiệm của phương trình $(A - \lambda E)x = \theta$ được gọi là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ. Số chiều của không gian riêng đó được gọi là bội số hình học của λ.

Quá trình tìm véc tơ riêng và cơ sở của không gian riêng

1) Giải phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda E) = 0$, tìm được các trị riêng $\lambda B_{1B}, \lambda B_{2B}, \ldots$

2) Với mỗi λB_{kB}, ta tìm nghiệm $x \in \ker(A - \lambda B_{kB}E)$ từ hệ $(A - \lambda B_{kB}E)x = \theta$. Dĩ nhiên hệ có vô số nghiệm, ta tìm cách biểu diễn chúng dưới dạng tổ hợp tuyến tính của một số véc tơ độc lập tuyến tính nào đấy trong $\ker(A - \lambda B_{kB}E)$, từ đó ta có cơ sở của $\ker(A - \lambda B_{kB}E)$.

2.1 Một số ứng dụng

2.1.1 Chéo hóa ma trận

Chéo hóa ma trận sau: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$ (kép).

- Với $\lambda = 0$: $(A - 0E)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Với $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Tính định thức ma trận

Cho A là ma trận vuông cấp n trên K và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của nó. Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A nên $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các nghiệm của đa thức đặc trưng $P_A(t)$. Do đó:

$$P_A(t) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_n)$$

Lấy t = 0, ta có:

$$\det A = P_A(0) = (-1)^n (0 - \lambda_1)(0 - \lambda_2)\ldots(0 - \lambda_n)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

Ví dụ1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Ta có det(A) = 15

Ta đi kiểm tra bằng các trị riệng:

Đa thức đặc trưng $P_A(t)$ của A là

$$P_A(t) = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det A$$

$$= t^2 - 8t + 15 = 0$$

Suy ra $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = 5$ là các giá trị riêng của ma trận A. Do vậy det(A)=15

Ví dụ 2: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tính $\det(A - 2015I_3)$

Giải:

Đa thức đặc trưng của ma trận A là: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Suy ra:

$$\det(A - 2015I) = P_A(2015)$$

$$= -2015^3 + 3.2015 + 2$$

2.1.3 Tính đa thức ma trận f(A)

Do $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng A nên $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của ma trận $f(A)$. Thật vậy:

Giả sử $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^i \in K[t]$.

Khi đó, $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i, f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i A^i$

Và $f(A)v = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i A^i \right) v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(A^i v \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\lambda^i v \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i \right) v = f(\lambda) v$$

Vậy $f(\lambda)$ là giá trị riêng của f (A). Do đó $\det f(A) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$.

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Tính f(A) với $f(x)=x^4+3x^3-1$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là $P_A(t) = -t^3 - 3t^2 + 4$. Lấy f(x) chia cho P(x) ta được thương là q(x)=-x và phần dư r(x)=4x-1. Do đó: f(x)= P(x). (–x)+(4x-1).

Suy ra f(A)= P(A). (–A)+(4A-1)=4A-1

2.4.4 Tính lũy thừa ma trận A^n

Trong nhiều ứng dụng ta thường phải làm phép tính sau đây: cho trước một ma trận A và nhiều vectors x, tính Ax với nhiều giá trị khác nhau của số mũ $A^n x$. *Ví dụ* nếu A là ma trận của một phép biến đổi tuyến tính (linear transformation) nào đó, như phép quay và co dãn trong computer graphics chẳng hạn, thì $A^n x$ cho ra kết quả của phép phép biến đổi tuyến tính này áp dụng k lần vào x.

Cho A, B và P là các ma trận sao cho $A = PBP^{-1}$.

Ta có:

$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PBP^{-1}.PBP^{-1}...PBP^{-1}$$

(n lần) và $P.P^{-1} = I$. Suy ra $A^n = PB^nP^{-1}$

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tính A^n bằng cách chéo hoá ma trận A.

* Đa thức đặc trưng $P_A(t)$ của ma trận A là $P_A(t) = (t-2)(3-t)$. Giải phương trình đặc trưng $f_A(t) = 0$, ta nhận được các nghiệm phân biệt 2,3. Do đó các giá trị riêng phân biệt của ma trận A là $t = 2,3$.

* Với t = 2, ta có

$\mathrm{E}_A(2) = \langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle$

và cơ sở $S_1 = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,0,1)\}$.

Với $t = 3$, ta có $\mathrm{E}_A(1) = \langle (0,1,1) \rangle$

và cơ sở $S_2 = \{v_3 = (0,1,1)\}$.

* Do $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ nên ma trận A chéo hoá được và $D = P^{-1}AP$, trong đó ma trận khả nghịch P với các cột là các véc tơ riêng v_1, v_2, v_3 và ma trận đường chéo D với các phần tử trên đường chéo chính 2,2,3 tương ứng với các véc tơ riêng v_1, v_2, v_3

$$P = [v_1 \ \ v_2 \ \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

và $D = \mathrm{diag}(2,2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^n = PD^nP^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 3^n - 2^n & 2^n \end{bmatrix}$$

2.4.5 Tính ma trận nghịch đảo

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Tính A^{-1}.

Đa thức đặc trưng của ma trận A là

$P_A(t) = -t^3 - 3t^2 + 4$

$$\Rightarrow P_A(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = 0$$

$$\Leftrightarrow A(-A^2 - 3A\ ) = -4I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{4}(-A^2 - 3A\ )$$

3. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh. *Toán học cao cấp, T1, Đại số và hình học giải tích*, nxb Giáo dục, 1998.

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh. *Bài tập Toán cao cấp, T1, Đại số và hình học giải tích*, nxb Giáo dục, 2004.

[3] Lay, David C. *Linear Algebra and Its Applications (3rd ed.).* Addison Wesley, 2005.

[4] Kolman, Bernard & Hill, David R. *Elementary Linear Algebra with Applications (9th ed.)*. Prentice Hall, 2007.

[5] Poole, David. *Linear Algebra: A Modern Introduction (2nd ed.)*. Brooks Cole, 2005.

[6] Meyer, Carl D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, 2001.

Eigenvalue - Eigenvector and some applications

Vu Hong Quan

Thai nguyen university of technology Faculty of General Science

Summary

Eigenvalues (*eigenvalue)* and private vector (*eigenvector)* is the very basic problems in Linear Algebra. This post will repeat the concept eigenvalues, eigenvectors and some relevant results. This knowledge is fundamental and will be used more in the next article theo..Bai research report focusing properties of eigenvalues own vector square matrix of order n and thereby raised some important applications important in linear algebra as the inverse problem, polynomial matrix, calculate the determinant, matrix exponential ...

Keywords*:* matrix, eigenvalues, separate vectors, determinants, matrix inversion ..

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Ngô Văn Giang

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Tích phân xác định đã được giới thiệu trong sách Giải tích 12 [1] và trong quyển Toán học cao cấp [2]. Ngoài những khái niệm, tính chất, những ứng dụng của nó trong việc tính diện tích, thể tích, độ dài cung đã được giới thiệu. Ở đây, tôi muốn trình bày thêm một vài ứng dụng của nó trong việc tính công, tính lực của một số bài toán thực tế. Đồng thời ứng dụng của nó trong một vài bài toán chứng minh bất đẳng thức, đẳng thức và tính giới hạn. Nhằm hi vọng giúp người đọc hiểu hơn nữa về ứng dụng của Toán học và cụ thể là ứng dụng của Tích phân xác định trong thực tế.

Từ khóa: Tích phân, ứng dụng, công, lực, bất đẳng thức …

NỘI DUNG

I. Ứng dụng của tích phân trong tính công và lực

Nhiều bài toán ứng dụng tích phân có thể được giải theo lược đồ dưới đây.

Giả sử đại lượng P liên hệ với biến độc lập x sao cho x tùy ý trong một khoảng cho trước, nếu cho x biến thiên một lượng dx

đủ nhỏ thì P biến thiên 1 lượng $\Delta P \approx f(x)dx$, số hạng bỏ qua là VCB bậc cao hơn dx. Khi đó $dP = f(x)dx \leftrightarrow P'(x) = f(x)$; vậy nếu f(x) liên tục và nếu x biến thiên từ a đến b, a và b trong khoảng đã cho thì P sẽ biến thiên một lượng tổng cộng là

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ 1: Bình hình trụ bán kính đáy là r và chiều cao la h (m) chứa đầy chất lỏng. Tính công cần thiết để hút hết chất lỏng ra khỏi bình (coi khối lượng riêng của chất lỏng là $\rho = 1$ và gia tốc trọng trường là g = 9,8).

Giải: Chia chiều cao h của hình trụ thành n phần bằng nhau, ta được các lớp chất lỏng với độ cao là $\frac{h}{n} = \Delta x$.

Xét lớp thứ i có độ sâu là $i\Delta x$ (i=1,2,…,n); thể tích của lớp này là

$\Delta V_i = \pi r^2 \Delta x$ với trọng lượng

$\Delta P_i = 9{,}8.1000\pi r^2 \Delta x$.

Công cần thực hiện để hút lớp chất lỏng này (với độ sâu $x_i = i\Delta x$) ra khỏi bình là $\Delta A_i \approx \Delta P_i x = 9{,}8.1000\pi r^2 \Delta x$. Như vậy, công A tổng cộng cho bởi:

$$A = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 9800\pi r^2 x_i \Delta x$$

$$= \int_0^h 9800\pi r^2 x dx = 4930\pi r^2 h^2 \text{ (J)}.$$

Ví dụ 2: Cánh cổng một đập nước có dạng hình thang đáy trên a, đáy dưới b (a>b), chiều cao h và đặt thẳng đứng. Tính lực tác dụng lên cánh cổng khi nước vừa hay ngập. Nếu mực nước chỉ bằng một nửa (h/2) thì lực tác dụng chỉ còn bao nhiêu phần trăm so với lực tác dụng ban đầu.

Giải: Ta biết rằng áp suất tỉ lệ thuận với độ sâu và ở độ sâu x, áp suất của nước là

$$9{,}8.1000x \left(\frac{N}{m^2}\right).$$

Xét một dải cánh cổng ở độ sâu x, đáy lớn là y và chiều cao dx với diện tích xấp xỉ là ydx. Vì dx nhỏ nên coi mọi điểm của dải có cùng độ sâu và do đó có cùng áp suất.

Áp lực nước lên dải này xấp xỉ bằng $\Delta P = 9800xydx = dP$.

Vì $y = a + \frac{b-a}{h}x$

$\rightarrow \Delta P = 9800x\left(a + \frac{b-a}{h}x\right)dx.$

Lấy tích phân ta được lực tác dụng lên cánh cổng khi nước vừa ngập là:

$$P = \int_0^h 9800x\left(a + \frac{(b-a)x}{h}\right)dx$$

$$= \frac{9800(a+2b)h^2}{6}(N).$$

Trường hợp mực nước chỉ bằng một nửa (h/2) thì áp dụng công thức trên với

$a = \frac{a+b}{2}, b = b, h = \frac{h}{2}$ ta được

$P = 9800\frac{a+5b}{2}h^2(N).$

Vậy nếu mực nước chỉ bằng một nửa thì tác dụng nước còn $\frac{100(a+5b)}{8(a+2b)}\%$.

II. Ứng dụng tích phân trong chứng minh trong chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.

Tính chất 1:

Nếu $f(x), g(x)$ khả tích trên [a, b] và $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Ví dụ 3: Cho x > 0, hãy chứng minh:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \forall n \ge 1.$$

Giải: Chứng minh quy nạp theo n.

- Với n = 1.

  Từ $e^t > 1 \; với \; t > 0$

  $suy \; ra \; \int_0^x e^t dt > \int_0^x dt$

  hay $e^x - 1 > x \rightarrow e^x > 1 + x.$
- Giả sử với n = k ta có

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} \; với \; x > 0$$

- Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k+1. Thật vậy, từ

$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$ $với\ x > 0$ suy ra

$$\int_0^x e^t dt > \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^k}{k!}\right) dt$$

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với n = k+1. Chứng tỏ bất đẳng thức đúng với mọi n.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

Chứng minh:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\rightarrow I_n = (\frac{n-1}{n})I_{n-2}$$

Qua công thức truy hồi này, ta có:

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{(2n(2n-2)\ldots 2)}(\frac{\pi}{2})$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx$$

$$= \frac{(2n)(2n-2)\ldots 2.1}{((2n+1)(2n-1)\ldots 3.1)}$$

Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$ta\ có \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$

Từ đó suy ra

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

Tính chất 2: Nếu $f(x) = g(x)$ với $\forall x \in (a,b) thì\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

Chứng minh: Ta có

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ suy ra

$$\int_0^1 (1+x)^n dx =$$

$$= \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n) dx$$

$$\rightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}|_0^1$$

$$= (C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1})|_0^1$$

Hay $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

III. Ứng dụng tích phân tính giới hạn.

Bài toán:

Cho $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$. $Tính\ Lim S_n$.

Bước 1: Biến đổi tổng về dạng

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(a + i\frac{b-a}{n}$$

Bước 2: Chỉ ra hàm f và chứng minh f liên tục trên [a, b].

Bước 3: Kết luận $Lim S_n = \int_a^b f(x)dx$

Trong thực hành ta thường gặp trường hợp đơn giản a = 0; b = 1.

Ví dụ 6: Tính

$$Lim[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}]$$

Giải: Ta có

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{2}\right)^2}}$$

Chia [0, 1] thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1..n)$. Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ lấy $\rho_i = \frac{i}{n}, \Delta_i = \frac{1}{n}$ khi đó

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\rho_i)\Delta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{2}\right)^2}}$$

Do đó,

$$Lim\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)}} = \frac{\pi}{6}$$

IV. Vài bài toán áp dụng.

Bài 1: Tìm công cần thiết để hút hết nước từ một bình hình nón lộn ngược với chiều cao h và bán kính đáy là R?

Bài 2: Chứng minh rằng:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln(n)<1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n-1}$.

Bài 3: Tính $lim\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}$

KẾT LUẬN

Trong cuộc sống chúng ta luôn muốn trả lời câu hỏi 'ứng dụng của toán học là gì?'. Để trả lời một phần nhỏ câu hỏi đó, trên đây tác giả đã trình bày môtj vài ứng dụng của tích phân xác định. Mặc dù chỉ là thêm một vài ứng dụng của tích phân xác định nhưng tác giả mong muốn người đọc có thể hình dung hơn về ứng dụng của mỗi lĩnh vực toán học trong các bài toán thực tế, và mở rộng hơn là ứng dụng của Toán học trong cuộc sống của chúng ta. Bài viết phù hợp cho sinh viên năm thứ nhất và năm thứ hai có thể tham khảo để hiểu sâu hơn về ứng dụng của tích phân xác định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Huy Đoan – *Bài tập giải tích nâng cao 12* – Nhà xuất bản giáo dục - 2009.

[2]. Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh – *Toán học cao cấp - Tập 2* – Nhà xuất bản Giáo dục – 2003.

[3] Tô Văn Ban – *Giải tích toán học nâng cao* – Nhà xuất bản giáo dục - 12/2005.

[4] Trần Phương– *Đại số sơ cấp* – Nhà xuất bản giáo dục.

SUMMARY

Definite integrals were introduced in Analysis of 12 [1] and in advanced mathematics book [2]. In addition to the concept, nature and the application of it in the calculation of area, volume, length provision had been introduced. Here, I would like to present a few more of its applications in the computing, compute power of some actual problem. Also its application in some problems proving the inequality, inequality and limits. To hopefully help readers understand more about the application of mathematics and specifically the application of Integral determined in practice.

Keywords: Integral, applications, construction sites, power, inequality ...

NGHIÊN CỨU VỀ MÔ HÌNH TOÁN HỌC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG MẶT PHẲNG

Nguyễn Thị Phương

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Hiện nay, để mô tả các hiện tượng tự nhiên, cần sử dụng các công cụ toán học một cách logic, nói tóm gọn đó chính là các phương trình toán học và các điều kiện toán học. Bài báo nghiên cứu việc dùng những công cụ toán học mô tả một hiện tượng tự nhiên, cụ thể là Mô hình toán học. Việc kiểm chứng sự đúng đắn trong việc lựa chọn đúng mô hình phù hợp, hay dạng toán tổng quát cho một mô hình nhìn chung là khó khăn, mọi lý thuyết đều phải được kiểm định bằng thực nghiệm.

Từ khoá: Mô hình toán học, công cụ toán học, …

NỘI DUNG

1. Mô hình toán học là gì

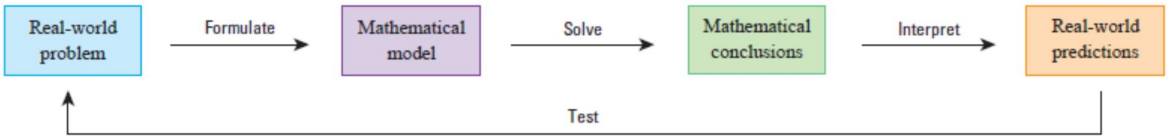
Trong khoa học kỹ thuật, kinh tế, môi trường v.v. nếu sử dụng phương pháp thực tiễn để làm thí nghiệm sẽ rất đắt đỏ, nguy hiểm và thậm chí là không thể thực hiện được. Nếu sử dụng phương pháp thực nghiệm để tính toán sẽ cho ra kết quả khách quan và rất chính xác, nhưng trong thời đại mà một máy tính cá nhân có thể tính toán hàng triệu phép tính trên một giây thì việc sử dụng

phương pháp lý thuyết để tính toán là điều cần thiết và hữu ích cho việc nghiên cứu cũng như dự đoán các hiện tượng tự nhiên

Một mô hình toán học là một mô tả toán học (thường là bằng phương tiện của một hàm hoặc một phương trình) của một hiện tượng trong thế giới thực như:sự phát triển của dân số, nhu cầu về một sản phẩm, tốc độ của một vật rơi, nồng độ của một sản phẩm trong một phản ứng hóa học, tuổi thọ của một người khi sinh, hoặc các chi phí của việc cắt giảm khí thải… Mục đích của các mô hình là để hiểu hiện tượng này và để đưa ra dự đoán về diễn biến trong tương lai.

2. Quá trình mô hình toán học

Hình 1 dưới đây minh họa quá trình mô hình toán học cho một vấn đề thực tế.



Hình 1

Nhiệm vụ đầu tiên của chúng ta là xây dựng một mô hình toán học bằng cách xác định và đặt tên các biến độc lập, các biến phụ thuộc, các giả định làm đơn giản hóa các hiện tượng đủ để có thể giải quyết toán học một cách dễ dàng. Chúng ta sử dụng kiến thức sự hiểu biết về tình huống vật lý và các kỹ năng toán học để có được phương trình thể hiện sự liên quan của các biến. Trong tình huống mà không có định luật vật lý để hướng dẫn, có thể cần phải thu thập dữ liệu (hoặc từ một thư viện hoặc Internet hoặc bằng cách tiến hành các thí nghiệm riêng) và kiểm tra dữ liệu trong bảng để phân biệt mô hình. Từ biểu diễn dạng số này của một hàm chúng ta có thểcó được một biểu diễn đồ hoạ bằng cách vẽ các dữ liệu. Đồ thị có thể sẽ gợi ýmột công thức đại số phù hợp trong một số trường hợp.

Giai đoạn thứ hai là áp dụng kiến thức toán học đã biết để giải quyết các mô hình toán học mà đã xây dựng được, tìm các kết luận toán học.

Trong giai đoạn thứ ba, chúng ta đưa ra những kết luận toán họcvà phiên dịch chúng vềthông tin các hiện tượng ban đầu trong thế giới thực bằng cách cung cấp những giải thích hoặc đưa ra dự đoán.

Bước cuối cùng là thử nghiệm, dự đoán bằng cách kiểm tra với dữ liệu thực tế mới. Nếu những dự đoán không phù hợp với thực tế, chúng ta cần phải tinh chỉnh mô hình hoặc xây dựng một mô hình mới và bắt đầu trở lại chu trình trên.

Ta cần nhận thức rõ, một mô hình toán học không bao giờ là một biểu diễn hoàn toàn chính xác về một tình hình cụ thể, nó là một sự lý tưởng hoá.Độ phức tạp của một mô hình toán học luôn bao gồm việc đánh đổi giữa sự đơn giản và độ hiệu quả. Ý tưởng cơ bản của Một nguyên lí đặc biệt liên quan đến vấn đề mô hình hóa là *giữa các mô hình mà có khả năng phán đoán tương đối như nhau, thì mô hình đơn giản nhất được lựa chọn*. Trong khi đó, việc tăng độ phức tạp thường tăng độ phù hợp của mô hình, nó lại làm cho mô hình trở lên khó hiểu và khó giải quyết, đồng thời có thể làm xuất hiện các vấn đề về tính toán, bao gồm sự ổn định của phép tính. Một mô hình tốt là mộtsự đơn giản hoá thực tế, đủ để cho phép toán họctính toán chính xác, và đủ để cung cấp các kết luận có giá trị. Điều quan

trọng, đó là nhận ranhững hạn chế của mô hình.

Việc sử dụng mô hình toán học để giải quyết một bài toán thực tiễn thường có sai số trong quá trình tính toán, những sai số này không được vượt quá mức độ giới hạn cho phép, trong giới hạn này mô hình toán học sẽ cho ra những lời giải rất sát với thực tiễn. Khi đấy có thể sử dụng các kết quả tính toán này cho việc nghiên cứu, đánh giá cũng như dự đoán các hiện tượng tự nhiên.

3. Sử dụng hàm để mô hình hoá các hiện tượng thực

Có rất nhiều loại hàm khác nhau có thể được sử dụng để mô hình hóa các mối quan hệđược quan sát trong thế giới thực. Trong phần tiếp theo, chúng ta cùng xem xét, thảo luận về các hàm, đồ thị của cáchàm và một số ví dụ về những tình huống thích hợp mô hình hóa bởi các hàmđó.

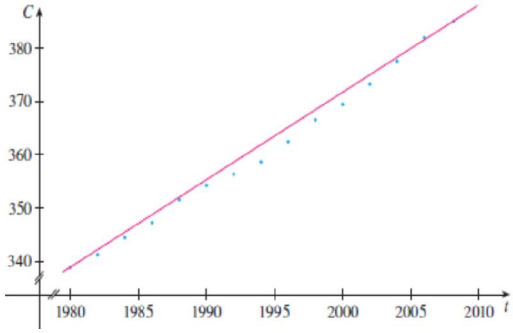
Ngoài ra, trong trường hợp không có nguyên lý hay nguồn gốc nào giúp xây dựng mô hình ta có thể xây dựng mô hình thực nghiệm. Dựa trên dữ liệu thu thập được ta tìm một đường cong phù hợp dữ liệu đã có.

Các mô hình tuyến tính: Khi ta nói y là một hàm tuyến tính của x có nghĩa là đồ thị của hàm là một đường thẳng, có công thức dạng y = mx + b, với m là độ nghiêng của đường thẳng. Tính chất đặc trưng của các hàm tuyến tính là chúng tăng với tốc độ không đổi.

Ví dụ 1: Nồng độ trung bình của carbon dioxide trong khí quyển (tính theo phần triệu) tại một địa điểm từ năm 1980 tới 2008 được cho bởi bảng sau. Tìm một mô hình phù hợp với các dữ liệu và sử dụng mô hình để ước lượng nồng độ trung bình của carbon dioxidenăm 1987 và dự đoán vào năm 2015.

Year	CO_2 level (in ppm)	Year	CO_2 level (in ppm)
1980	338.7	1996	362.4
1982	341.2	1998	366.5
1984	344.4	2000	369.4
1986	347.2	2002	373.2
1988	351.5	2004	377.5
1990	354.2	2006	381.9
1992	356.3	2008	385.6
1994	358.6		

Hình 2



Hình 3

Giải: Chúng ta vẽ một đồ thị thể hiện sự phân bố của các số liệu trong bảng và nhận thấy rằng các điểm dữ liêu gần như nằm trên một đương thẳng. Vì vậy một mô hình tuyến tính là phù hợp. Ta chọn đường thẳng đi qua điểm đầu tiên và điểm cuối cùng.

Hệ số $m = \frac{385.6-338.7}{2008-1980} = 1.675$ và phương trình là

$$C - 338.7 = 1.675(t - 1980) \Longrightarrow C = 1.675t - 2938.$$

Chú ý rằng dữ liệu cho bởi mô hình hầu hết cao hơn so với thực tế. Áp dụng phương pháp xây dựng gần đúng bình phương tối thiểu $C = mt + b$ ta tìm được phương trình $= 1.67429t - 2938.07$. Dựa vào đồ thị, ta thấy đây là một xấp xỉ phù hợp hơn.

Năm 1987: C(1987) = 349.0

Năm 2015: C(2015) = 395.32

Time (seconds)	Height (meters)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

Hình 4

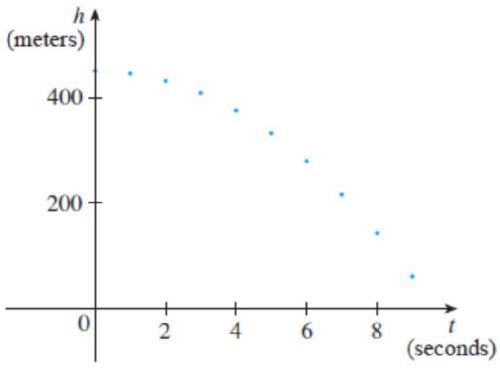
Đa thức: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, trong đó n là số nguyên không âm và a_i là các hằng số, được gọi là hệ số của đa thức.

Ví dụ 2: Một quả bóng bị rơi từ tầng quan sát trên cùng của một tháp cao 450 m trên mặt đất, và chiều cao h của nó trên mặt đất được ghi nhận the thời gian tính bằng giây trong bảng. Tìm một mô hình để phù hợp với các dữ liệu và sử dụng các mô hình để dự đoán thời gian mà tại đó bóng chạm đất.

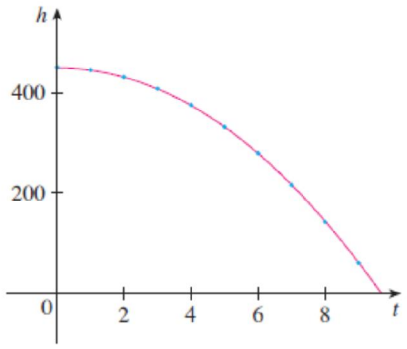
Giải: Chúng ta vẽ một đồ thị thể hiện sự phân tán của các số liệu trong và nhận thấy rằng một mô hình tuyến tính là không phù hợp. Nhưng có vẻ như các điểm dữ liệu có thể nằm trên một parabol, vì vậy chúng ta cố gắng một tìm mô hình bậc hai để thay thế.

Sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu, chúng ta có được mô hình bậc hai sau

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.09t^2$$



Hình 5



Hình 6

Vẽ đồ thị của phương trình cùng với các điểm dữ liệu tathấymô hình bậc hai cho mộtước lượng rất tốt. Bóng rơi xuống đất khi h = 0, vì vậy giải phương trình bậc hai

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{0.96^2 - 4(-4.90).449.36}}{2.(-4.90)}$$

Nghiệm dương t ≅ 9.67, chúng ta dự đoán rằng quả bóng sẽ rơi xuống đất sau khoảng 9,7 giây.

Hàm luỹ thừa: $f(x) = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbf{R}$, miền xác định phụ thuộc α.

Nếu $\alpha \in N$ thì $D_f = R$. Nếu α nguyên âm thì $D_f = R\backslash\{0\}$. Nếu $\alpha = 1/p$ ($p \in N^*$): với p chẵn thì $D_f = R_+$, với p lẻ thì $D_f = R$, với p nguyên âm thì D_f cũng phụ thuộc tính chẵn lẻ của p.

Nếu α là số vô tỷ thì $D_f = \{x : x \geq 0\}$ khi $\alpha > 0$ và $D_f = \{x : x > 0\}$ khi $\alpha < 0$.

Hàm luỹ thừa cũng được sử dụng để mô hình hoá các mối quan hệ giữa số lượng sinh vật của một loài và diện tích cư trú, giữa độ rọi sáng và khoảng cách tới nguồn sáng, sự quay vòng của một hành tinh với khoảng cách từ nó tới mặt trời.

Các hàm phân thức hữu tỷ:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

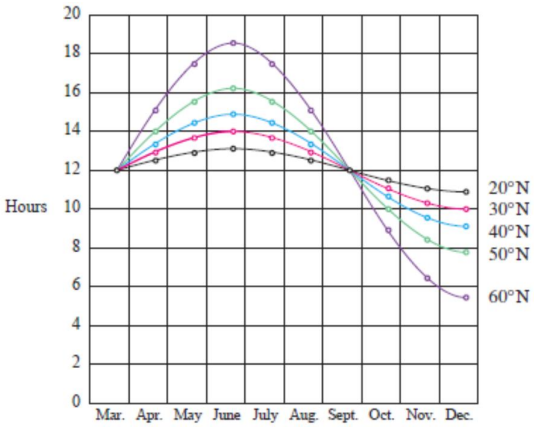
với $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ là các đa thức.

Các hàm đại số: Là hàm tạo thành từ các phép toán đại số (cộng, trừ, nhân, chia và lấy

căn) với các đa thức, hàm phân thức hữu tỷ là một trường hợp của hàm đại số.

Các hàm lượng giác: y = sinx, y = cosx, y= tanx, y= cotanx

y = sinx, y = cosx là các hàm tuần hoàn với T = 2π còny= tanx, y= cotanx là các hàm tuần hoàn với T = π. Tính tuần hoàn của các hàm lượng giác giúp chúng phù hợp để mô hình các hiện tượng như thuỷ triều, các rung động, các sóng âm thanh.



Hình 7

Ví dụ 3:Bảng sau cho mối quan hệ giữa số giờ sáng trong ngày với vĩ độ tại một địa điểm. Biết rằng Philadelphia ở khoảng 40^0 vĩ bắc, tìm hàm mô hình xấp xỉ cho số giờ sáng trong ngày tại Philadelphia.

Giải: Nhận xét rằng mỗi đường cong giống như một hàm sin bị di chuyển và kéo căng ra. Nhìn vào đường màu xanh da trời, tại vĩ độ của Philadelphia , một ngày kéo dài 14.8 tiếng vào ngày 21.6 và 9.2 tiếng vào ngày 21.12. Vậy biên độ của đường cong (yếu tố để ta kéo dãn đường sin theo chiều dọc) là $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

Vì 1 năm có 365 ngày, chu kỳ của hàm mô hình là 365, mà chu kỳ hàm sin là 2π, nên ta cần kéo dãn đường sin, $c = \frac{2\pi}{365}$.

Chú ý rằng đường cong bắt đầu chu kỳ vào ngày 21.3, ngày thứ 80 của năm. Vì vậy ta di chuyển đường cong đi 80 đơn vị về phía bên phải. Ta chuyển đường cong lên trên 12 đơn vị. Vậy ta có hàm mô hình đo độ dài của một ngày ở Philadelphia vào ngày thứ *t* của năm là

$$L(t) = 12 + 2.8\sin(\frac{2\pi}{365}(t - 80))$$

Các hàm mũ: $f(x) = a^x$, với $a > 0$ và $a \neq 1$, hàm có miền XĐ là **R**, và miền giá trị là $(0, +\infty)$

Các hàm mũ phù hợp với việc mô hình các hiện tượng tự nhiên như sự phát triển của dân số (nếu $a > 1$) và sự phân rã của phóng xạ (nếu $0 < a < 1$).

Các hàm logarithm: $f(x) = \log_a(x)$, với $a > 0$ và $a \neq 1$. Đây là hàm ngược của a^x. Hàm có miền XĐ là $(0, +\infty)$, và miền giá trị là **R**.Nếu a = 10, ta viết ngắn gọn là lg(x), và gọi là logarit thập phân của x

KẾT LUẬN

Toán học được coi là khô khan tuy nhiên trong cuộc sống, đây là một công cụ không thể thiếu để loài người mô tả, giải thích và tiên đoán các hiện tượng tự nhiên. Mô hình toán học là tổng quan tất cả những công cụ toán học như thế. Cách đơn giản nhất để kiểm tra sự phù hợp của mô hình đề xuất là dựa vào các số liệu đã đo đạc thực nghiệm hay các dữ liệu mang tính kinh nghiệm khác. Nói chung, cần dùng nhiều công cụ toán để kiểm chứng, cũng như đánh giá độ phù hợp của dữ liệu với một phân bố cho sẵn hoặc đi đến một mô hình tổng quát mà chỉ sự dụng giả thiết tối thiểu về dạng toán của mô hình.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] James STEWART,(2010)*Single variable Calculus Early Transcendentals*.7th.Edition.

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2007),*Toán cao cấp tập 2*, NXBGD.

[3] Ôn Ngũ Minh 2010, *Toán học cao cấp – Phép tính giải tích một biến số*, nxb H&KT

STUDY ON MATHEMATIC MODEL AND SOME PROBLEMS IN FLAT SURFACE

Nguyen Thi Phuong

Department of Mathematics, Faculity of Fundamental Sciences, Thai Nguyen University of technology

SUMMARY

Nowadays, in order to describe natural phenomena, it is necessary to logically use the mathematical tools, that are the mathematical equations anh mathematical terms. This paper investigates the mathematical tools that describe a specific natural phenomenon, or the mathematic model. The test in selecting the right pattern matching, or generalized forms of a model is generally difficult. However, all theories must be test empirically.

Keywords: mathematic model, mathematical tools…

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM TRONG CUỘC SỐNG

Phạm Thị Thu

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Đạo hàm mang một ý nghĩa tổng quát và mang trong mình một sức mạnh to lớn không thể tưởng tượng: *Đạo hàm cho chúng ta biết được tốc độ biến thiên (tốc độ thay đổi) của một hàm số*. Đạo hàm không chỉ dành riêng cho các nhà toán học, mà đạo hàm còn được ứng dụng rất nhiều trong cuộc sống và các ngành khoa học khác: một nhà kinh tế muốn biết tốc độ tăng trưởng kinh tế nhằm đưa ra những quyết định đầu tư chứng khoán đúng đắn; một nhà hoạch định chiến lược muốn có những thông tin liên quan đến tốc độ gia tăng dân số ở từng vùng miền; một nhà hóa học muốn xác định được tốc độ phản ứng hóa học nào đó, hay nhà vật lí muốn tính toán vận tốc, gia tốc của một chuyển động… Đạo hàm sẽ là thứ mà chúng ta cần, rất đơn giản đầu tiên bạn cần có hàm số mô tả đại lượng đang được quan tâm, và sau đó chỉ cần đạo hàm nó.

TỪ KHÓA: *Đạo hàm, ý nghĩa của đạo hàm.*

NỘI DUNG

1.Định nghĩa đạo hàm

Đạo hàm mang một ý nghĩa tổng quát và mang trong mình một sức mạnh to lớn không thể tưởng tượng: *Đạo hàm cho chúng ta biết được tốc độ biến thiên (tốc độ thay đổi) của một hàm số*. Ý nghĩa này rất quan trong vì với đạo hàm, bất cứ ở đâu có sự thay đổi, ở đó chúng ta sẽ biết được nó thay đổi như thế nào: liệu đại lượng đó đang tăng hay đang giảm hay đang không thay đổi, nếu là đang tăng vậy tăng nhanh hay tăng chậm…

Như ta đã biết đạo hàm được định nghĩa như sau: Cho f(x) xác định trong (a, b) và điểm c $\in$ (a, b). Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ = A (hữu hạn), thì A được gọi là đạo hàm của f(x) tại c, ký hiệu là f '(c).

Đặt $\Delta x = x - c$ và $\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c)$

Ta có:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Nếu f '(x)>0, chứng tỏ rằng tại đó hàm số tăng theo x, đồ thị hàm số đang đi lên.

Nếu f '(x)<0 chứng tỏ rằng tại đó hàm số giảm theo x, đồ thị hàm số đang đi xuống.

Ta cùng đi xét ứng dụng của đạo hàm trong cuộc sống và các ngành khoa học xã hội như thế nào.

2. Một số ứng dụng của đạo hàm

2.1. Trong vật lý

Nếu s = f(t) là phương trình chuyển động của một chất điểm di chuyển trên một đường thẳng, thì Δs/Δt biểu thị vận tốc trung bình trong khoảng thời gian là Δt, và v = s'(t) biểu thị vận tốc tức thời tại thời điểm t. Tốc độ biến thiên của vận tốc tức thời trên một đơn vị thời gian được gọi là gia tốc:

a(t) = v'(t) = s''(t)

Vậy, ta có thể đi giải quyết các vấn đề liên quan đến sự chuyển động một cách dễ dàng.

Ví dụ: Cho phương trình chuyển động của một chất điểm: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, với đơn vị đo của t là giây, và s là mét.

a, Tìm vận tốc tại thời điểm t ?

b, Tìm vận tốc của chất điểm sau 2 giây ? Sau 4 giây ?

c, Khi nào chất điểm đứng yên? Khi nào chất điểm chuyển động tiến về phía trước?

d, Tính tổng quãng đường mà chất điểm di chuyển được trong 5 giây đầu tiên?

Bài giải:

a, Phương trình của vận tốc là đạo hàm của phương trình chuyển động

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

b, Vận tốc sau 2 giây tức là vận tốc tức thời khi t = 2:

$v(2) = s'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3$ m/s.

Vận tốc sau 4 giây là:

$v(4) = s'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9$ m/s.

c, + Chất điểm đứng yên khi v(t) = 0, tức là:

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

+ Chất điểm chuyển động về phía trước khi v(t) > 0, tức là:

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) > 0$$

Vậy, chất điểm chuyển động về phía trước khi t < 1 và t > 3. Nó sẽ chuyển động lùi về phía sau khi 1 < t < 3.

d, Theo ý c, để tính được khoảng cách chất điểm đi được trong 5 giây đầu tiên thì ta phải tính quãng đường chất điểm đi được trong các khoảng thời gian là: [0,1], [1,3] và [3,5].

Quãng đường chất điểm đi được trong một giây đầu tiên là: |f(1)–f(0)| = |4 –0|= 4m.

Từ t = 1 tới t = 3 thì chất điểm đi được quãng đường là: |f(3) – f(1)| = |0 – 4| = 4m.

Từ t = 3 tới t = 5 thì chất điểm đi được quãng đường là: |f(5) – f(3)| = |20– 0| = 20m.

Vậy tổng quãng đường mà chất điểm đi được là : 4 + 4 + 20 = 28m.

2.2.Trong sinh học

Giả sử n = f(t) là số lượng các cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t. Sự thay đổi số lượng các cá thể giữa thời điểm $t = t_1$ và $t = t_2$ là $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, và vì vậy tốc độ phát triển trung bình trong khoảng thời gian $t_1 \le t \le t_2$ là:

$$\text{Tốc độ phát triển TB} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Tốc độ phát triển tức thời tìm được từ tốc độ phát triển trung bình bằng cách cho Δt dần tới 0:

$$\text{Tốc độ phát triển} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Nhưng chưa hoàn toàn thật sự chính xác bởi vì đồ thị trên thực tế của phương trình n = f(t) là không liên tục khi một cá thể được sinh ra hoặc chết đi và vì vậy không thể lấy vi phân. Tuy nhiên, đối với một quần thể động vật hay thực vật lớn, chúng ta có thể thay thế bằng một đường cong trơn gần đúng.

Cụ thể ta đi xét một quần thể vi khuẩn trong một môi trường đồng nhất. Giả sử rằng mẫu thử được xác định trong một khoảng thời gian đã biết sẽ gấp đôi về số lượng trong

mỗi giờ. Nếu gọi mẫu thử lúc đầu là n_0 và thời gian là t (được đo bằng giờ) thì:

$f(1) = 2f(0) = 2n_0$

$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$

$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$

Tổng quát ta có: $f(t) = 2^t n_0$

Khi đó ta có phương trình: $n = 2^t n_0$

Vậy, tốc độ phát triển về số lượng của vi khuẩn tại thời điểm t là

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2^t n_0\right) = n_0 \times 2^t \times \ln 2$$

Ví dụ: giả sử mẫu thử ban đầu của ta là $n_0 = 100$. Vậy tốc độ phát triển sau 4 giờ là:

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \times 2^4 \times \ln 2 \approx 1109$$

Điều này nghĩa là, sau 4 giờ, số lượng vi khuẩn đang tăng với tốc độ khoảng 1109 vi khuẩn /giờ.

2.3.Trong kinh tế

Giả sử C(x) là tổng chi phí mà một công ty phải trả để sản xuất x đơn vị của một hàng hóa nào đó. Hàm C được gọi là hàm chi phí. Nếu số lượng sản xuất tăng từ x_1 tới x_2, thì chi phí phải trả thêm là $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, và tốc độ biến thiên trung bình về chi phí là:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\left(x_2\right) - C\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{C\left(x_1 + \Delta x\right) - C\left(x_1\right)}{\Delta x}$$

Giới hạn của $\Delta C/\Delta x$ khi Δx dần tới 0 là tốc độ biến thiên tức thời của chi phí với biến là số lượng sản xuất hàng hóa, giới hạn đó được gọi là chi phí biên

$$\text{Chi phí biên} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

(ta coi C(x) là một hàm liên tục).

Lấy $\Delta x = 1$ và n lớn , ta có:

$$C'(n) \approx C\left(n+1\right) - C(n)$$

Như vậy, chi phí biên của việc sản xuất n hàng hóa xấp xỉ bằng với chi phí sản xuất thêm một đơn vị hàng hóa (hàng hóa thứ (n+1)).

Nó thường thích hợp để trình bày một hàm tổng chi phí được cho bởi môt đa thức:

$$C\left(x\right) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Với a là chi phí quản lý (tiền thuê mướn: điện thoại, máy móc, đất đai…; bảo trì, bảo dưỡng) và các số hạng khác đại diện cho chi phí về nguyên liệu, nhân công,…(chi phí về nguyên liệu có thể tỷ lệ với x, nhưng chi phí về nhân công có thể phụ thuộc phần nào vào lũy thừa của x bởi vì chi phí làm ngoài giờ và làm việc không hiệu quả, hoặc gặp rắc rối là những vấn đề hay gặp phải trong sản xuất với quy mô lớn).

Ví dụ: giả sử một công ty ước lượng chi phí (đô la) để sản xuất x hàng hóa là:

$$C(x) = 10000 + 5x + 0,01x^2$$

Khi đó hàm chi phí biên là :

$$C'(x) = 5 + 0,02x$$

Vậy chi phí biên để sản xuất 500 hàng hóa là: C’(500) = 5 + 0,02(500) = \$15/hàng hóa

Điều này cũng dự báo cho ta biết trước chi phí sản xuất của hàng hóa thứ 501 là:

$C(501) - C(500) =$

$= [10000 + 5(501) + 0,01(501)^2]$

$- [10000 + 5(500) + 0,01(500)^2]$

= \$15.01.

Chú ý rằng:

$$C'\left(500\right) \approx C\left(501\right) - C\left(500\right)$$

KẾT LUẬN

Đạo hàm không chỉ ứng dụng trong vật lý, sinh học, kinh tế như đã nêu ví dụ ở trên mà nó còn ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống và rất nhiều ngành khoa học khác nữa. Một kỹ sư muốn biết về tốc độ của nước chảy vào hoặc chảy ra của một bể chứa. Một nhà khí tượng học muốn tìm hiểu về sự biến thiên của áp suất khí quyển dựa vào độ cao.

Một nhà địa lý muốn nghiên cứu về tốc độ biến thiên của mật độ dân số ở một thành phố. Hay trong lĩnh vực xã hội học, phép tính vi phân được sử dụng để phân tích sự lan truyền của một thông tin (lời đồn hoặc sự đổi mới hoặc xu hướng thời trang hoặc những trào lưu nhất thời). Nếu p(t) biểu thị cho một bộ phận dân số biết một thông tin nào đó tại thời điểm t, thì đạo hàm dp/dt thể hiện tốc độ lan truyền của thông tin đó. Và ngay trong cuộc sống hàng ngày, đồng hồ công-tơ-mét xe máy chính là một chiếc máy tính đạo hàm .Ví dụ: Quan sát trên chiếc đồng hồ công tơ mét xe máy

Lúc x =10 giờ xe khởi hành, công tơ mét chỉ quãng đường xe đã đi trước đó là f(x) = 30025 km.

Lúc x = 10 giờ + 6 phút , công tơ mét chỉ f(x+a) = 30029 km.

Ta có: quãng đường đã đi được là: f(x+a) - f(x) = 4 km, trong thời gian a = 6(phút) = 1/10(giờ).

Vậy xe máy đang đi tốc độ là

[f(x+a) - f(x)]/a = 40km/giờ.

Khi đó ta thấy rằng, kim tốc độ sẽ chỉ ở 40km/giờ. Hóa ra chiếc kim tốc độ chính là chiếc máy tính đạo hàm con đường xe máy đi được theo thời gian không biết mệt mỏi. Khi xe dừng lại, kim chỉ số 0, tức là quãng đường không tăng không giảm, tức là xe đứng yên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ôn Ngũ Minh, Phạm Thị Thu Hằng , *Bài giảng học phần Toán 2*, 2012.

[2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên) , *Toán học cao cấp,* Tập 2, NXB Giáo dục, 2006.

[3] James Stewart , *Single Variable Calculus: Early Transcendental, 7th Edition*, 2010.

SUMMARY

The derivative carries a general sense and in its a tremendous strength unthinkable: The derivative tells us that the rate of change of a function. Derivatives not only for mathematicians, but also derivative numerous applications in our life and other sciences: an economist is interested in knowing the economic growth that would lead to the first decision proper securities; an urban geographer is interested in the rate of change of the population density in a city ; a chemist wanted to determine the speed of certain chemical reactions, or physicists want to calculate the velocity, the acceleration of a movement ... The derivative would be something we need, quite simply your first required quantity function description is concerned, and then it just derivative.

KEYWORDS: The derivative, the meaning of the derivative.

ÁNH SÁNG – SÓNG HAY HẠT

Đồng Thị Linh

Bộ môn Vật lý, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Bản chất đích thực của ánh sáng gây tranh cãi giữa các nhà khoa học trong nhiều thế kỷ. Trước thế kỷ XIX, cả hai quan điểm sóng và hạt ánh sáng cùng đồng thời tồn tại. Tuy nhiên, với uy tín cao của mình trong giới khoa học bấy giờ, thuyết hạt ánh sáng do Isaac Newton đề xuất có phần chiếm ưu thế hơn. Sang thế kỷ XIX, với những thí nghiệm giao thoa của Yuong, thí nghiệm nhiễu xạ của Fresnel, lý thuyết sóng ánh sáng lại một lần nữa được củng cố. Thế kỷ XX, với bước

ngoặt là công trình nghiên cứu của De Broglie về lưỡng tính sóng hạt của không chỉ ánh sáng mà mọi vi hạt đã thống nhất hai quan điểm sóng và hạt ánh sáng và thừa nhận lưỡng tính sóng hạt của ánh sáng.

Từ khóa *ánh sáng, lưỡng tính sóng hạt, phản xạ, khúc xạ, hiệu ứng quang điện, hiệu ứng Compton*

MỞ ĐẦU

Giáo sư Trịnh Xuân Thuận đã viết "*Ánh sáng hiện hữu khắp mọi nơi, tới mức chúng ta coi nó là hiển nhiên và đối xử với nó một cách thờ ơ, cho tới khi quanh ta đột nhiên là bóng tối chúng ta mới thấy nhớ ánh sáng*". Vậy ánh sáng là gì? Ngày nay, khoa học thừa nhận ánh sáng vừa có tính sóng vừa có tính hạt, tức là ta có thể coi ánh sáng như là một sóng điện từ đang lan truyền đi trong không gian hoặc cũng có thể coi ánh sáng như một chùm hạt.

Tuy nhiên, để đi đến được sự thống nhất này, hai quan điểm sóng và hạt của ánh sáng đã trải qua nhiều thăng trầm trong lịch sử.

1. Quan điểm về ánh sáng trước thế kỉ XIX

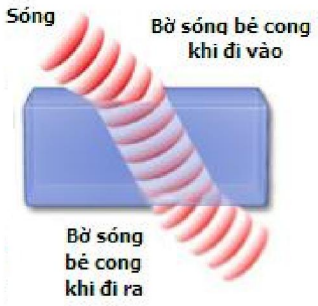
1.1. Huygens, cha đẻ của lý thuyết sóng ánh sáng

Christian Huygens (1629-1695)**,** nhà toán học và Vật lý học người Hà Lan, cho rằng ***ánh sáng lan truyền trong không gian cũng giống như sóng***. Sóng ánh sáng truyền trong không gian qua chất trung gian ête, tồn tại như một thực thể vô hình không màu sắc, không mùi vị.

Cơ chế truyền sóng: Theo Huygens, một nguồn sáng bao gồm vô số các hạt rung động. Các hạt này truyền rung động của chúng tới các hạt ête bên cạnh dưới dạng các sóng cầu có tâm tại mỗi một hạt này. Vô số các sóng cầu này được truyền đi, và bán kính tác dụng của chúng tăng dần theo thời gian. Chúng chồng chập lên nhau và biểu hiện hỗn độn của chúng ở gần nguồn sáng giảm dần khi các sóng truyền ra xa nguồn sáng. Càng xa nguồn sáng, sóng càng trở nên trơn và đều đặn hơn. Từ đó, ông giải thích các hiện tượng như sau:

**** Hiện tượng phản xạ:*** nguồn sáng phát ra các sóng ánh sáng trải ra theo mọi hướng. Khi chạm lên gương, các sóng bị phản xạ theo góc tới, nhưng với mỗi sóng phản hồi trở lại tạo ra một ảnh đảo ngược.

**** Hiện tượng khúc xạ ánh sáng:*** Huygens cho rằng vận tốc ánh sáng trong một chất bất kì tỉ lệ nghịch với chiết suất của nó. Do có vận tốc khác nhau trong các môi trường khác nhau nên khi sóng ánh sáng đi qua mặt phân cách giữa hai môi trường, chùm ánh sáng bị bẻ cong.



Tuy nhiên thuyết sóng của Huyghens chưa giải thích được hiện tượng nhiễu xạ và tán sắc ánh sáng.

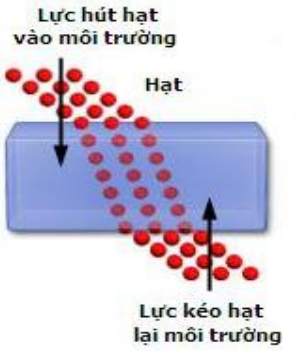
1.2. Newton: ánh sáng là hạt

Nhà Vật lý người Anh Isaac Newton (1643-1727) quan niệm ***ánh sáng có tính chất hạt***. Ánh sáng được coi như những dòng hạt đặc biệt nhỏ bé được phát ra từ các vật

phát sáng và bay theo đường thẳng trong môi trường đồng chất. Từ cơ sở đó, ông giải thích các hiện tượng như sau:

* ***Nguyên nhân tạo ra màu sắc:*** Kích thước của các hạt ánh sáng khác nhau. *Các hạt nhỏ nhất tạo ra cảm giác màu tím, các hạt lớn hơn gây ra cảm giác về màu chàm, và cứ tiếp tục như vậy hạt màu đỏ sẽ là lớn nhất.* Bởi vì tồn tại bảy màu cơ bản, nên các hạt phải có bảy loại kích thước khác nhau.

**** Hiện tượng phản xạ:*** do sự phản xạ của các quả cầu đàn hồi trong chùm sáng khi va chạm và các hạt bị nảy lên từ những điểm khác nhau, nên trật tự của chúng trong chùm sáng bị đảo ngược lại tạo ra một hình đảo ngược. Nếu bề mặt quá gồ ghề thì các hạt bị nảy lên ở nhiều góc khác nhau, kết quả là làm tán xạ ánh sáng.



****Hiện tượng khúc xạ:*** do tác dụng của mặt phân giới lên hạt ánh sáng làm cho hạt đó thay đổi hướng truyền và bị gãy khúc ở mặt phân cách giữa hai môi trường. Vì ánh sáng đi vào môi trường đậm đặc hơn sẽ bị các phân tử môi trường đó hút và vận tốc sẽ tăng lên dẫn đến vận tốc ánh sáng trong môi trường nước hay thủy tinh lại lớn hơn vận tốc ánh sáng trong môi trường khí.

****Tán sắc ánh sáng qua lăng kính:*** Ông đưa ra giả thuyết cho rằng trên bề mặt của một vật trong suốt tồn tại một vùng rất mỏng ở đó có một lực tác dụng để kéo các tia sáng vào bên trong nó. Vì vậy, các hạt màu tím, do chúng nhỏ hơn, sẽ bị hút bởi một môi trường đặc hơn không khí mạnh hơn so với các hạt lớn hơn có màu đỏ, tức các hạt màu tím bị lệch khỏi đường đi ban đầu của nó nhiều hơn các hạt màu đỏ.

****Hiện tượng nhiễu xạ:*** ông giải thích là do có một lực đẩy có tác dụng đẩy các hạt ánh sáng vào trong bóng tối hình học của một vật.

1.3 Leonhard Euler: Sự hồi sinh của lý thuyết sóng ánh sáng

Suốt thế kỷ XVIII, lý thuyết hạt ánh sáng của Newton đã lấn át tuyệt đối lý thuyết sóng ánh sáng mà Huygens đề xuất. Do đó thuyết hạt ánh sáng được các nhà vật lý trong thời kì này chấp nhận. Tuy nhiên, nhà toán học Leonhard Euler *(1707 – 1783)* cho rằng có sự tương tự hóa giữa ánh sáng và âm thanh "*có một sự hài hòa tương tự giữa các nguyên nhân và các tính chất của âm thanh và ánh sáng, và như vậy lý thuyết âm thanh chắc chắn sẽ làm sáng tỏ rất nhiều lý thuyết ánh sáng*".

Một trong những điểm tiến bộ trong quan niệm sóng của Euler là ông cho rằng: mỗi một màu của ánh sáng được đặc trưng bởi một bước sóng nhất định.

Như vậy, Euler là người đầu tiên gắn kết các khái niệm bước sóng và tần số với màu sắc.

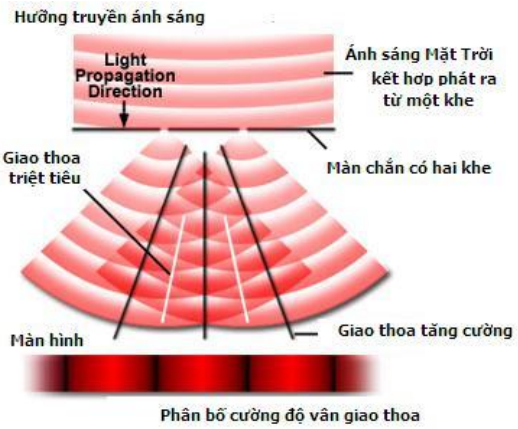
Thế kỉ XVIII khép lại với những tranh cãi về hai qua điểm sóng và hạt ánh sáng mà trong đó quan điểm hạt ánh sáng của Newton chiếm ưu thế hơn.

2. Thế kỉ XIX: Quan điểm sóng ánh sáng lên ngôi

Ở nửa đầu thế kỷ XIX đã diễn ra một cuộc cách mạng trong lĩnh vực quang học. Mở đầu cho cuộc cách mạng này là Thomas Young và Augustin Fresnel.

2.1. Thomas Young (1773 – 1829)

Ông đã tiến hành thí nghiệm giao thoa ánh sáng qua hai khe và giải thích đầy đủ hiện tượng này dựa trên tính chất sóng của ánh sáng.



2.2. Augustin Fresnel (1788 – 1827)

Fresnel đã công nhận bản chất sóng của ánh sáng qua thí nghiệm về giao thoa mà ông đã tự bố trí (dùng hai gương phẳng đặt lệch nhau một góc gần bằng 180^o, thường được gọi là hai gương Fresnel).

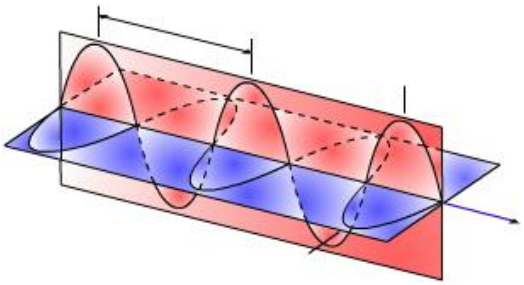
Fresnel cũng là người đầu tiên theo trường phái sóng ánh sáng đã giải thích thành công hiện tượng phân cực ánh sáng đã khiến cho những người bảo vệ lý thuyết sóng phải rất đau đầu ngay cả Thomas Young. Bởi nếu coi ánh sáng là sóng giống như âm thanh thì cả hai phải có cùng các hiệu ứng, trong khi không thể tìm ra hiện tượng phân cực ở sóng âm. Để giải thích hiện tượng này, Fresnel đã đưa ra một lời giải mang tính cách mạng: mặc dù cả âm thanh và ánh sáng đều có bản chất sóng, nhưng chúng khác nhau về mặt phẳng dao động.

Những công trình của Young và Fresnel đã giúp cho lý thuyết sóng hồi sinh và trở nên áp đảo lý thuyết hạt vốn đứng vững bởi uy tín của Newton. Những thí nghiệm của Young và Fresnel đã chứng tỏ bản chất sóng của ánh sáng. Đặc biệt, Fresnel đã khẳng định một cách chắc chắn rằng ánh sáng là sóng ngang.

2.3. James Clerk Maxwell (1831 – 1879)

Tuy nhiên để có thể đưa ra được mô hình sóng ánh sáng một cách đầy đủ, gọn gàng thì phải đến khi Maxwell đưa ra hệ phương trình về sóng điện từ và cho rằng sóng ánh sáng thực chất cũng chính là sóng điện từ.

Trong lịch sử vật lý, Newton đã thống nhất trời và đất qua định luật vạn vật hấp dẫn thì đến lượt Maxwell đã thống nhất không chỉ



điện và từ mà còn cả quang học, ông được coi là nhà thống nhất vĩ đại thứ hai của vật lý học.

Cho đến đầu thế kỉ XIX, quan niệm ánh sáng là sóng đã thực sự được xác nhận, đặc biệt là sau kết luận của Maxwell khẳng định ánh sáng là sóng điện từ với vận tốc là 300.000 km/s.

3. Thế kỷ XX – ánh sáng là sóng hay hạt?

Đầu thế kỷ XX, các hiện tượng quang điện không thể giải thích được khi ta xem ánh sáng là sóng. Einstein là người đầu tiên giải thích các hiện tượng quang điện bằng việc đưa ra thuyết photon. Ông cho rằng chùm ánh sáng là chùm các hạt nhỏ gọi là photon hay các lượng tử ánh sáng.

Tuy nhiên ta có thể thấy quan niệm "hạt ánh sáng" do Einstein đưa ra là khác với quan niệm trước đây của Newton, đó không phải là những hạt cơ học đơn giản như quan niệm của Newton mà có những thuộc tính riêng của nó. Nhờ vào giả thuyết về lượng tử ánh sáng này Einstein đã hoàn toàn giải thích được 3 thí nghiệm của mình về hiệu ứng quang điện.

Sau đó hơn 10 năm, trong thập niên 1920, lí thuyết của Einstein về tính chất hạt của ánh sáng một lần nữa được củng cố bởi các thí nghiệm của nhà vật lí người Mĩ Arthur Compton**.** Khi nghiên cứu sự hay tán xạ tia X trên bản graphit, ông nhận thấy trong chùm

tia tán xạ, có những bước sóng lớn hơn bước sóng ban đầu. Compton đã giải thích hiện tượng này bằng sự va chạm giữa photon với electron của chất tán xạ, trong đó ông coi photon như một hạt có tính cơ học. Nếu thừa nhận ánh sáng có bản chất sóng thì Compton sẽ không thể giải thích được hiện tượng đã xảy ra, chỉ khi chấp nhận ánh sáng có bản chất hạt, và sử dụng thuyết photon của Einstein thì ông mới có thể giải thích được trọn vẹn hiện tượng.

Như vậy, cho đến đầu thế kỉ XX tồn tại một câu hỏi đặt ra cho các nhà khoa học: bản chất của ánh sáng là sóng hay hạt. Các hiện tượng giao thoa, nhiễu xạ và tán sắc chứng minh ánh sáng có tính chất sóng. Tuy nhiên, các hiện tượng quang điện và Compton lại chỉ giải thích được khi thừa nhận ánh sáng có tính chất hạt. Vậy ánh sáng thực chất là sóng hay hạt?

Cùng khoảng thời gian nghiên cứu của Compton, một nhà khoa học người Pháp Louis Victor-de Broglie cho rằng tất cả vật chất và bức xạ đều có những tính chất vừa giống sóng vừa giống hạt.

Broglie. Nhiệm vụ của vật lí học về ánh sáng là tìm hiểu những ứng dụng của ánh sáng nhằm phục vụ cuộc sống của con người.

Công trình của De Broglie, liên hệ tần số của một sóng với năng lượng và khối lượng của một hạt, mang tính cơ sở trong sự phát triển của một lĩnh vực mới cuối cùng sẽ dùng để giải thích bản chất vừa giống sóng vừa giống hạt của ánh sáng. Đó chính là cơ học lượng tử.

Qua đó ta thấy, vấn đề đặt ra ở thế kỉ XX khi tìm hiểu về ánh sáng không phải là sự tranh chấp giữa hai quan điểm để xác định quan điểm nào đúng mà lại là sự thống nhất chúng lại trong một lí thuyết mới. Ngày nay chúng ta công nhận ánh sáng có lưỡng tính sóng – hạt. Hai tính chất này cùng tồn tại trong một thể thống nhất là ánh sáng và tùy điều kiện của hiện tượng khảo sát, bản chất này hay bản chất kia của ánh sáng được thể hiện. Quan điểm này đã thực sự khép lại những cuộc tranh luận về bản chất ánh sáng là sóng hay hạt, và hơn thế nữa, thuộc tính ***"lưỡng tính sóng-hạt"*** không chỉ tồn tại ở ánh sáng mà còn được suy rộng ra cho các hạt vật chất, như ta đã biết trong lí thuyết của De

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] David Halliday- Robert Resnick-Jearl Walker, *Cơ sở vật lý* –tập 6, NXB Giáo Dục, 1999

[2] Vũ Quang – Vũ Đào Chỉnh, Bài giảng Quang học, NXB Giáo Dục, 1967

[3] Http://vi.wikipedia.org/wiki

[4] Http://thuvienvatly.com

SUMMARY

The true nature of light controversial among scientists for centuries. Before the nineteenth century, both point light waves and particles exist simultaneously. However, with its high reputation in the scientific community that time, the particle theory of light by Isaac Newton proposed more dominant part. In nineteenth century, with Young's double-slit experiment and the experiment of Fresnel diffraction, wave theory of light again been strengthened. The twentieth century, with the turning point was the work of De Broglie's wave-particle duality of not only light but also microparticles agreed two points of light waves and particles and recognition of wave-particle duality of light .

Keywords *light, wave-particle duality, reflection, refraction, photoelectric effect, Compton-effect*

SỬ DỤNG PHẦN MỀM VẬT LÝ ẢO TRONG GIẢNG DẠY VẬT LÝ

Hoàng Mạnh Chung

Bộ môn Vật lý, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT ĐỀ TÀI

Hiện nay một số thí nghiệm vật lý ở các phòng TN ko đủ điều kiện và khả năng để cho học sinh quan sát hoặc chứng minh các định lý định luật và hiện tượng. Phương án đưa ra là tạo một phần mềm TN ảo giúp học sinh và sinh viên có thể hiểu sâu hơn về các hiện tượng và nắm rõ các hiện tượng đó. Phần mềm này giúp giáo viên có thể làm được những TN mà ko thể thực hiện được trong phòng thi nghiệm. Ở đây xin giới thiệu **Phần mềm thí nghiệm Vật lý ảo-Crocodile Physics**

Keywords : Crocodile Physics, thí nghiệm vật lý ảo, thí nghiệm vật lý phổ thông, thí nghiệm vật lí đại cương…….

NỘI DUNG

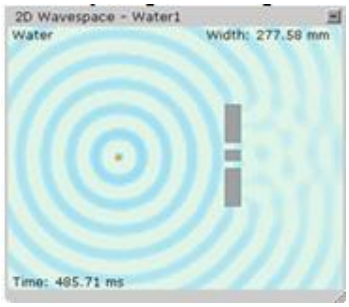
I .CÁC PHẦN THÍ NGHIỆM

1. Mở rộng không gian thí nghiệm

Một tính năng hoàn toàn mới đó là giao diện thiết kế và thực hiện thí nghiệm là toàn bộ màn hình như bên, thêm vào đó có bổ sung phần "Getting start" trong folder "Contents" giúp cho người sử dụng học một số bước cơ bản nhất có thể thiết kế và sử dụng phần mềm này

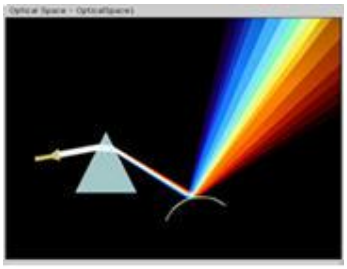
2. Không gian sóng 2D

Trước đây công cụ quan sát các dải sóng là 1D, tức là các đường sóng hình sin hay cosin nhưng trong phiên bản này chúng ta có thể quan sát sóng ở dạng 2D, như trong hình bên bạn có thể quan sát thấy một thí nghiệm khá trực quan, sống động, gây chú ý cho học sinh bởi vì trông nó giống một hòn bi được thả vào nước và ta nhìn thấy sóng nước đang lan truyền.



3. Quang học

Phần này cũng được cải tiến nhiều so với phiên bản trước về giao diện sử dụng.

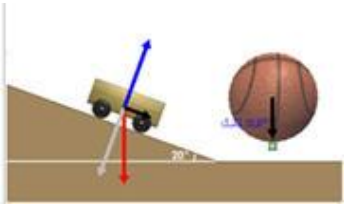


4. Máy móc

Như hình bên ta có thể thấy hình ảnh dụng cụ thí nghiệm ảo này rất gần với vật thật, đây là một bước đột phá rất quan trọng góp phần đưa các thí nghiệm trực quan hơn, giúp cho học sinh dễ dàng liên hệ với thực tế và nhớ bài dễ dàng hơn.

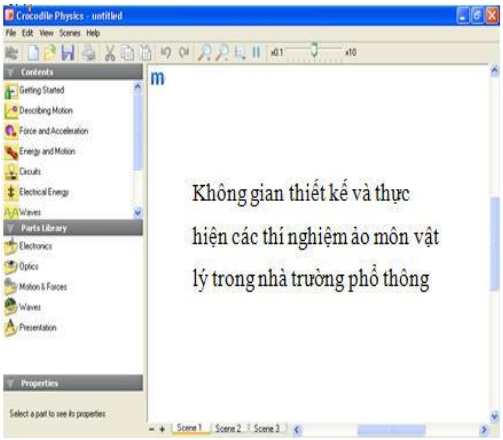
5. Chuyển động

Chuyển động là một cải tiến mới và được sử dụng linh hoạt.



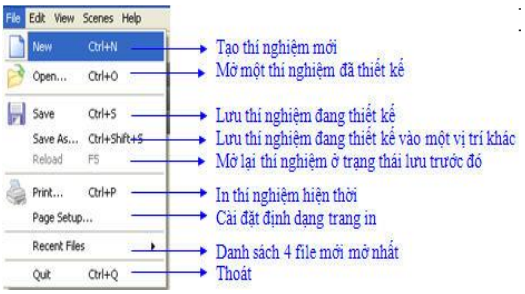
II. CÁC CÔNG CỤ

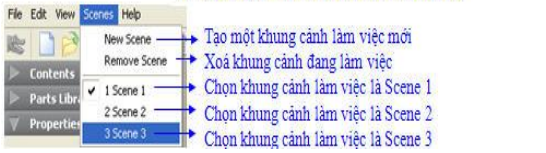
Dưới đây là màn hình chính của phần mềm Crocodile Physics 605:



Sau đây tôi xin giới thiệu các công cụ sử dụng phần mềm Crocodile Physics 605, trước hết nói đến thanh menu ngang trên cùng gồm có:

Menu





Parts Library

Đây là thư viện các dụng cụ thí nghiệm vật lý ảo, với các dụng cụ này bạn hoàn toàn có thể thiết kế toàn bộ các thí nghiệm vật lý trong trường phổ thông, tuy nhiên để cho thí nghiệm trở nên chuyên nghiệp hơn thì phải kết hợp sử dụng các dụng cụ này kết hợp các dụng cụ hỗ trợ thực hiện thí nghiệm trong foder Presentation của phần này.

Các công cụ hỗ trợ thiết kế thí nghiệm

Giới thiệu các công cụ hỗ trợ thiết kế thí nghiệm chuyên nghiệp hơn đó là foder Presentation trong thư viện các dụng cụ thí nghiệm Parts Library. Ngoài các dụng cụ thí nghiệm ảo còn có các dụng cụ hỗ trợ như thước đo, đồ thị, tranh vẽ, các nút dừng thí nghiệm hay thực hiện lại thí nghiệm, …

Measurement Tools Ruler Protractor Marker	Đây là các dụng cụ đo trong đó có dụng cụ đo độ dài *Ruler* và dụng cụ đo góc *Protractor*, còn lại dụng cụ *Marker* là một đường thẳng mũi tên hai chiều và có thể đặt tên cho đường này (có thể đánh tiếng việt có dấu).
Graph	Đây là dụng cụ để biểu diễn đồ thị
Text	Dụng cụ này được sử dụng để viết các câu chú thích, giải thích hay hướng dẫn, …
Instructions	Đây cũng là một công cụ để viết các câu hướng dẫn nhưng nó được bổ sung thêm 2 nút để có thể đưa ra các câu hướng dẫn lần lượt, theo từng bước thực hiện thí nghiệm.
Picture	Sử dụng dụng cụ này để đưa tranh vẽ vào trong thí nghiệm làm cho thí nghiệm thêm trực quan hơn.
Animation	Sử dụng công cụ này để tạo ra các hoạt ảnh sống động,

	gây hứng thú cho học sinh
Button	Sử dụng công cụ này để thay đổi hình ảnh khung làm việc mỗi khi kích chuột trái.
Number	Dụng cụ này dùng để chỉ dẫn cho một dụng cụ thí nghiệm ảo nào đó ta chọn đồng thời đưa ra thông số có liên quan về dụng cụ đó.
Checkbox	Công cụ này dùng để cho phép hiển thị hoặc không hiển thị dụng cụ được chọn liên kết tới checkbox này.
Drop-down list	Đây cũng là một công cụ dùng để chú thích cho dụng cụ thí nghiệm nào đó mà ta chọn, nó có thể là cho phép hiển thị công cụ hay một danh sách số lượng bánh răng của một bánh xe, …
Edit box	Dùng dụng cụ này để đặt tên cho dụng cụ thí nghiệm liên kết với Edit box này.
Pause	Nút này được sử dụng để dừng thí nghiệm
Reload	Đây là nút này được sử dụng để thực hiện lại thí nghiệm từ đầu, các dụng cụ thí nghiệm trở lại như khi chưa thực hiện thí nghiệm.
Part Tray	Dụng cụ này được sử dụng như một giá đựng các dụng cụ thí nghiệm ảo.

KẾT LUẬN

Phần mềm rất hữu ích trong việc hỗ trợ giảng dạy môn vật lý.Có thể làm được những thí nghiệm mà các thiết bị ở trường học không làm được. Giúp sinh viên năm được nội dung bài học qua những thí nghiệm dễ dàng hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hoàng Anh, Đỗ Thị Châu (2008), *Tự học của sinh của sinh viên,* NXB Giáo Dục Hà Nội.
2. Lương Duyên Bình (2007), *Vật lí đại cương, tập 2*, NXB Giáo Dục, Hà Nội.
3. Lương Duyên Bình (chủ biên), Vũ Quang (Chủ biên) (2007), *Bài tập Vật lí lớp 11,* NXB Giáo Dục, Hà Nội.
4. Lương Duyên Bình (Tổng chủ biên), Vũ Quang (Chủ biên) (2008), *Sách giáo khoa Vật lí lớp 12,bài 20*. NXB Giáo dục, Hà Nội.
5. Lương Duyên Bình (Chủ biên) (2006), *Bài tập Vật lí đại cương, tập 2*. NXB Giáo dục, Hà Nội.
6. Lương Duyên Bình (Tổng chủ biên), Vũ Quang (Chủ biên). *Sách giáo khoa Vật lí lớp 11,bài 23-24*.NXBGD,7/2007.
7. Nguyễn văn Đồng (chủ biên) (1980),*Phương pháp giảng dạy vật lí*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
8. Phùng Việt Hải (2007), *Tổ chức hoạt động dạy học chương "Chuyển động của hạt mang điện trong điện trường và từ trường" – học phần điện và từ đại cương, nhằm phát huy tính tích cực, tự chủ của người học,* luận văn thạc sĩ khoa học giáo dục, Trường Đại học sư phạm Hà Nội.
9. Phạm Xuân Hậu (2003*), Dạy đại học có sự tham gia tích cực, chủ động của sinh*

viên và một số biện pháp kỹ năng cần có của giảng viên, kỷ yếu hội thảo khoa học "Đổi mới nội dung, phương pháp dạy học ở các trường ĐHSP, Ba Vì.

10. Đào Hữu Hồ (2001), xác suất, NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội.
11. Nguyễn Văn Khải, Nguyễn Duy Chiến, Phạm Thị Mai (2007), *Lí luận dạy học Vật lí ở trường phổ thông* - NXB Giáo dục.
12. Đặng Vũ Hoạt (Chủ biên) (2005), *Lý luận dạy học ở Đại học*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.

Summary

Currently some physics experiments in the labs do not meet the conditions and ability to let students observe or prove the theorem laws and phenomena. The plan was that creates a virtual TN software help students and students can better understand the phenomena and understand these phenomena. This software can help teachers make the TN that can not be done in laboratories. Here introduce software virtual physics laboratory-Crocodile Physics

Keywords: Crocodile Physics, virtual physics experiments, physics experiments ordinary general physics experiments .....

VÉC TƠ PHÂN CỰC CỦA CÁC NƠTRON TÁN XẠ TRÊN BỀ MẶT TINH THỂ PHÂN CỰC TRONG ĐIỀU KIỆN CÓ PHẢN XẠ TOÀN PHẦN

Nguyễn Thị Thu Hoàn

Bộ môn Vật lý, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

I. Tóm tắt

Hiện nay, phương pháp quang học hạt nhân của các nơtron phân cực trong các môi trường có các hạt nhân phân cực được khởi xướng bởi Giáo sư Barushevski được mở rộng nghiên cứu trong rất nhiều điều kiện khác nhau: phản xạ, khúc xạ, nhiễu xạ...Trong bài thảo luận này, tác giải sử dụng phương pháp này để đi nghiên cứu véc tơ phân cực của các nơtron tán xạ trên bề mặt tinh thể phân cực trong điều kiện có phản xạ toàn phần.

Từ khóa vector phân cực, nơtron phân cực, các hạt nhân phân cực, điều kiện phản xạ toàn phần.

II. Giới thiệu

Hiện tượng: Dùng một chùm nơtron chậm phân cực chậm bắn vào bia (năng lượng dưới 1MeV và không đủ để tạo ra quá trình sinh hủy hạt), nhờ tính chất trung hòa về điện, đồng thời moment lưỡng cực điện vô cùng nhỏ (gần bằng 0) nên nơtron không tham gia tương tác điện, dẫn đến độ xuyên sâu của chùm nơtron vào tinh thể là lớn và bức tranh giao thoa của sóng tán xạ sẽ cho ta thông tin về cấu trúc tinh thể và cấu trúc từ của bia.

III. Véc tơ phân cực của các nơtron tán xạ trên bề mặt tinh thể có các hạt nhân phân cực trong điều kiện có phản xạ toàn phần

Khi chùm nơtron bay vào tinh thể với góc nhỏ hơn góc tới hạn phản xạ toàn phần thì:

$$e^{ik^{>}_{x\pm}x} = e^{ik^{<}_{x}n_{\pm}x} \rightarrow e^{-k^{<}_{x}\beta_{\pm}x}$$

Ở đó $\beta_{\pm} = \mathrm{Im}\, n_{\pm} > 0$ - phần ảo của hệ số khúc xạ của nơtron ở góc có phản xạ toàn phần, tương ứng với

$$k^{>}_{x\pm} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\left(E_{\perp} - V_o \pm \mu G_{eff}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(k^{<2}_{x} - \frac{2m}{\hbar^2}V_o \pm \frac{2m}{\hbar^2}\mu G_{eff}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= k_x^< \left(1 - \frac{2mV_o}{\hbar^2 k_x^{<2} \sin^2(x)} \pm \frac{2m\mu G_{eff}}{\hbar^2 k_x^{<2} \sin^2(x)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Trong trường hợp có phản xạ toàn phần chúng ta có thể cho $\beta_\pm$ biểu thức sau đây:

$$\beta_\pm = \mathrm{Im}\left(1 - \frac{2mV_o}{\hbar^2 k_x^{<2} \sin^2(x)} \pm \frac{2m\mu G_{eff}}{\hbar^2 k_x^{<2} \sin^2(x)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ta nhận thấy rằng $\beta_\pm$ phụ thuộc vào giá trị V_o và μG_{eff}. Mà $V_o \approx \frac{2\pi\hbar^2}{m}\rho f(0)$, ở đó ρ là mật độ hạt nhân, $f(0)$ là biên độ tán xạ về phía trước. Chúng ta chọn

$$k^< = 10^9 cm^{-1}, G_{eff} = 3.10^4 Gauss,$$

$$\rho = 10^{22} cm^{-3}, f(0) = 10^{-12} cm$$

Với các tham số $\theta_{toihan} \le 10^{-3} rad$

Như vậy để cho $\theta < \theta_{toihan}$, độ sâu tắt dần của nơtron trong tinh thể là:

$$l_+ = \frac{1}{k_x^< \beta_+}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Im}\left(1 - \frac{2mV_o}{\hbar^2 k_x^{<2} \sin^2(x)} \pm \frac{2m\mu G_{eff}}{\hbar^2 k_x^{<2} \sin^2(x)} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\approx 10^{-6} cm$$

Như vậy trong trường hợp có phản xạ toàn phần hàm sóng của nơtron đã nhanh chóng tắt dần ở một lớp mỏng của tinh thể.

Để cho bức tranh trọn như trên, trong trường hợp có phản xạ toàn phần ta có:

$$t_{1l} = t_{2l} = \int d\vec{r}_\parallel^{'} e^{i\vec{Q}_\parallel \vec{r}_\parallel} \int_0^\infty dx' \frac{1}{2} B_+^{*'} B_+ e^{ik_{x+}^{>'} x} e^{ik_{x+}^{>} x} \delta\left(\vec{r}^{'} - \vec{R}_l \right)$$

$$= \int d\vec{r}_\parallel^{'} e^{i\vec{Q}_\parallel \vec{r}_\parallel} \int_0^\infty dx' \frac{1}{2} B_+^{*'} B_+ e^{ik_x^{<'} \beta' x} e^{ik_x^{<} \beta x} \delta\left(\vec{r}^{'} - \vec{R}_l \right)$$

$$= \frac{1}{2} B_+^{*'} B_+ e^{-i\vec{Q}_\parallel \vec{R}_{l\parallel}} e^{-\left(k_x^{<'} \beta + k_x^{<} \beta \right) R_{lx}}$$

Tiết diện tán xạ bề mặt hiệu dụng của tán xạ phi đàn hồi của nơtron có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{k'}} = \frac{m^2}{(2\pi)^3 \hbar^5} \frac{k'}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'} - E_k)t}$$

$$\times \sum_{ll'} \left[\begin{array}{l} 2A_l^* A_{l'} t_{1l}^* t_{1l'} + P_\alpha 2\mathrm{Re}(A_l^* A_{l'} t_{1l}^* t_{1l'}) \\ + 2B_l^* B_{l'} t_{1l}^* t_{1l'} \left\langle \left(J_{lx}(0) - \left\langle J_{lx}(0) \right\rangle \right) \left(J_{l'x}(t) - \left\langle J_{l'x}(t) \right\rangle \right) \right\rangle \end{array} \right]$$

Do các hàm số $e^{-\left(k_x^{<'} \beta + k_x^{<} \beta \right) x}$ và $e^{-i\vec{Q}_\parallel \vec{R}_{l\parallel}}$ nhanh chóng tắt dần khi đi vào tinh thể, chúng ta có thể đưa ra kết luận quan trọng rằng tiết diện tán xạ bề mặt hiệu dụng của các nơtron trong trường hợp có phản xạ toàn phần chứa thông tin quan trọng về các hàm tương quan của các spin của các hạt nhân bề mặt tinh thể.

Chúng ta đi tính toán và xem xét véc tơ phân cực của nơtron phân cực trên bề mặt tinh thể có các hạt nhân phân cực khi có phản xạ toàn phần

$$\vec{P} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Sp\left\{ \rho_{muc} \rho_o \left\langle \widehat{T_{k'k}^+} \vec{\sigma} \widehat{T_{k'k}^+}(t) \right\rangle \right\} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'} - E_k)t} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} Sp\left\{ \rho_{muc} \rho_o \left\langle \widehat{T_{k'k}^+} \widehat{T_{k'k}^+}(t) \right\rangle \right\} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'} - E_k)t} dt} \quad (*)$$

Trong đó:

$$\widehat{T_{k'k}} = \sum_l \Big[A_l t_{1l} I + B_l t_{1l} \vec{\sigma} \left(\vec{J}_l - \left\langle \vec{J} \right\rangle \right)$$

$$+ A_l t_{1l} \vec{\sigma_z} + B_l t_{1l} \left(J_{lz} - \left\langle J_{lz} \right\rangle \right) I \Big]$$

Đặt $\vec{\varepsilon_l} = \vec{J_l} - \left\langle \vec{J_l} \right\rangle$, $\varepsilon_{lz} = J_{lz} - \left\langle J_{lz} \right\rangle$

Thay vào (*) ta có:

$$\widehat{T_{k'k}} = \sum_l \Big[A_l t_{1l} I + B_l t_{1l} \vec{\sigma} \vec{\varepsilon_l} + A_l t_{1l} \vec{\sigma_z} + B_l t_{1l} \varepsilon_{lz} I \Big]$$

Ta đi xem xét thành phần P_x có dạng như sau:

$$P_x = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Sp\left\{\rho_{nuc}\rho_o \left\langle \widehat{T^+_{k'k}}\sigma_x \widehat{T^+_{k'k}}(t)\right\rangle\right\} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} Sp\left\{\rho_{nuc}\rho_o \left\langle \widehat{T^+_{k'k}}\widehat{T^+_{k'k}}(t)\right\rangle\right\} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t} dt}$$

Để tính được thành phần P_x của các nơtron phân cực chúng ta cần tính các vết sau:

$$sp\left\{\frac{1}{2}\left(I+\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}\right)\rho_{nuc}\widehat{T^+_{k'k}}\sigma_x\widehat{T^+_{k'k}}(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}sp\left\{\rho_o\rho_{nuc}\widehat{T^+_{k'k}}\sigma_x\widehat{T^+_{k'k}}(t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}sp\left\{\left(I+\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}\right)\rho_{nuc}\right.$$

$$\times\sum_{ll'}\left(A^*_l t^*_{1l}I+B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}+A^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma_z}+B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\right)\sigma_x$$

$$\left.\times\left(A_{l'}t_{1l'}I+B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}+A_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma_z}+B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}I\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}sp\left\{\sum_{ll'}\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\right.$$

$$+\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$+\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}$$

$$+\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x A_{l'}t_{1l'}$$

$$+\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$+\rho_{nuc}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$+\rho_{nuc}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_l}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x A_{l'}t_{1l'}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}A^*_l t^*_{1l}I\sigma_z\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\overrightarrow{\sigma\varepsilon_{l'}}$$

$$+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x A_{l'}t_{1l'}\sigma_z$$

$$\left.+\rho_{nuc}\overrightarrow{P_o}\overrightarrow{\sigma}B^*_l t^*_{1l}\varepsilon_{lz}I\sigma_x B_{l'}t_{1l'}\varepsilon_{l'z}\right\}$$

Ở đây chúng ta tính tiết diện hiệu dụng của các nơtron trên tinh thể sắt từ có các hạt nhân phân cực. Nếu tinh thể được từ hóa dọc theo trục z thì các số hạng cho đóng góp vào tiết diện tán xạ không đàn hồi sẽ tỉ lệ với các hàm tương quan spin theo công thức:

$$\left\langle\left(J_{lx}(0)-\left\langle J_{lx}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'x}(0)-\left\langle J_{l'x}(0)\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$\left\langle\left(J_{ly}(0)-\left\langle J_{ly}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'y}(0)-\left\langle J_{l'y}(0)\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$\left\langle\left(J_{lx}(0)-\left\langle J_{lx}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'y}(0)-\left\langle J_{l'y}(0)\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$\left\langle \left(J_{ly}(0)-\left\langle J_{ly}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'x}(0)-\left\langle J_{l'x}(0)\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$\left\langle \left(J_{lx}(0)-\left\langle J_{lx}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'y}(0)-\left\langle J_{l'y}(0)\right\rangle\right)\right\rangle,$$

$$\left\langle \left(J_{ly}(0)-\left\langle J_{ly}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'x}(0)-\left\langle J_{l'x}(0)\right\rangle\right)\right\rangle$$

Sẽ biến mất và

$$\left\langle \left(J_{ly}(0)-\left\langle J_{ly}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'y}(0)-\left\langle J_{l'y}(0)\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle \left(J_{lx}(0)-\left\langle J_{lx}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'x}(0)-\left\langle J_{l'x}(0)\right\rangle\right)\right\rangle$$

Qua các tính toán phức tạp ta tính được thành phần véc tơ phân cực theo phương x:

$$P_x=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t}dt\left(X_1+X_2\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dte^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t}\times X}$$

Trong đó:

$$X_1=2P_{ox}A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}$$

$$X_2=-iB_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{ly}\right\rangle$$
$$+iA_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{l'y}\right\rangle$$
$$+B_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{lx}\right\rangle$$
$$+A_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{l'x}\right\rangle$$

$$X=\sum_{ll'}\Big[2A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+P_{oz}2\,\mathrm{Re}(A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'})$$
$$+2B_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left\langle\left(J_{lx}(0)-\left\langle J_{lx}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'x}(\mathrm{t})-\left\langle J_{l'x}(\mathrm{t})\right\rangle\right)\right\rangle\Big]$$

Thành phần véc tơ phân cực theo phương y

$$P_y=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t}dt\left(X_3+X_4\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dte^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t}\times Y}$$

Trong đó:

$$X_3=2P_{oy}A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}$$

$$X_4=iB_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{lx}\right\rangle$$
$$-iA_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{l'x}\right\rangle$$
$$+iB_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{lx}\right\rangle$$
$$-iA_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left(1+P_{oz}\right)\left\langle\varepsilon_{l'x}\right\rangle$$

$$Y=\sum_{ll'}\Big[2A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+P_{oz}2\,\mathrm{Re}(A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'})$$
$$+2B_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left\langle\left(J_{lx}(0)-\left\langle J_{lx}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'x}(\mathrm{t})-\left\langle J_{l'x}(\mathrm{t})\right\rangle\right)\right\rangle\Big]$$

Thành phần véc tơ phân cực theo phương z

$$P_z=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t}dt\left(X_5+X_6\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dte^{\frac{i}{\hbar}(E_{k'}-E_k)t}\times Z}$$

Trong đó:

$$X_5=2A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+2P_{oz}A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}$$

$$X_6=\left(P_{ox}B_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}-iP_{oy}B_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\right)\left\langle\varepsilon_{lx}\right\rangle$$
$$+\left(iP_{oy}A_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+P_{ox}A_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\right)\left\langle\varepsilon_{l'x}\right\rangle$$
$$+\left(iP_{ox}B_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+P_{oy}B_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\right)\left\langle\varepsilon_{ly}\right\rangle$$
$$+\left(P_{oy}A_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}-iP_{ox}A_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\right)\left\langle\varepsilon_{l'y}\right\rangle$$
$$+\left(2B_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+2P_{oz}B_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\right)\left\langle\varepsilon_{lz}\right\rangle$$
$$+\left(2A_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+P_{ox}A_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\right)\left\langle\varepsilon_{l'y}\right\rangle$$

$$Z=\sum_{ll'}\Big[2A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}+P_{oz}2\,\mathrm{Re}(A_l^*A_{l'}t_{1l}^*t_{1l'})$$
$$+2B_l^*B_{l'}t_{1l}^*t_{1l'}\left\langle\left(J_{lx}(0)-\left\langle J_{lx}(0)\right\rangle\right)\left(J_{l'x}(\mathrm{t})-\left\langle J_{l'x}(\mathrm{t})\right\rangle\right)\right\rangle\Big]$$

Như vậy sau những tính toán phức tạp chúng ta thu được các thành phần P_x, P_y, P_z của véc tơ phân cực của các nơtron tán xạ hạt nhân trên bề mặt tinh thể có các hạt nhân phân cực trong điều kiện có phản xạ toàn phần.

Kết quả này cho thấy các thành phần này chứa những thông tin quan trọng về các hàm tương quan của các spin của các hạt nhân nằm trên bề mặt tinh thể.

Trong trường hợp tinh thể không phân cực những kết quả tính toán của chúng tôi quy về được kết quả đã được công bố của Giáo sư **Барышевсний**.

IV. Kết luận

Đã tính được véc tơ phân cực của các nơtron tán xạ hạt nhân trên bề mặt tinh thể có các hạt nhân phân cực trong điều kiện có phản xạ toàn phần. Véc tơ phân cực này chứa thông tin quan trọng về các hàm tương quan của spin của các hạt nhân nằm trên bề mặt tinh thể. Trong trường hợp tinh thể không phân cực những kết quả của chúng tôi quy về được kết quả đã được công bố của Giáo sư **Барышевсний.**

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Quang Báu, Bùi Đằng Đoan, Nguyễn Văn Hùng, (2004), *Vật lý thống kê*, nxb Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[2] Nguyễn Đình Dũng "Sự tiến động của spin của nơtron trong tinh thể có các hạt nhân phân cực được đặt trong từ trường ngoài biến thiên tuần hoàn", *Tạp chí KHĐHQG Hà Nội*, 1997, t.XIII, $N^0$3, Tr.10-14.

[3] Nguyễn Xuân Hãn, (1998), *Cơ học lượng tử* , Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[4] Nguyễn Văn Hùng, (2000), *Vật lý chất rắn*, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[5] Nguyễn Văn Hùng, (2005), *Điện động lực học*, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[6] Lê Văn Trực, Nguyễn Văn Thoả, (2005), *Phương pháp toán cho vật lý*, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[7] Do Thi Van Anh, Nguyen Van Tu, Nguyen Dinh Dung, *Tatal diffraction reflection of polarized neutrons by polarized crystal placed in periodical variable magnetic field,* Science Conference on Physics, Ha Noi university of science, Ha Noi- 2008.

[8] Beteman B., Cole H.(1961), "Dynamical Diffraction of X-Ray by perfect crystals". *Rev.Mod.Phys.,* V.36,N.3, P.681-71

[9] Барышевский В. Г.,''Ядерная оптика поляризованных сред''. Ми:Изд. БГУ, 1976.-144 С .

[10] Барышевсний В . Г., Каналирование, "изучение и реакцни в кристаллах при высоки знергиеях".-Мн: изд.Б гу им. В. И. Ленина, 1982, -255с.

[11] Барышевсний В . Г., "Многчастотная прецессия спина нейтрона в однородом маганитом поле".// Письма в ЖЭТФ.-1981.-Т.33.-В.I. - С. 78-81.

[12] Барышевсний В . Г., Черепица С. В. "Явление прецессии нейтронов и спиновых дихроизм немаганитных неполяризованных кристаллов".// Вестник АН БССР.-1985.- Сер. Физ.мат. наук.-з.-с.116-118.

POLARIZATION VECTORS OF SCATTERED NEUTRONS FROM POLARIZED CRYSTAL SURFACES IN THE TOTALLY REFLECTED CONDITIONS

Nguyen Thi Thu Hoan

Department of Physics, Faculty of General Sciences, Thai Nguyen University of Technology

SUMMARY

Currently, the nuclear optical method of polarizing neutrons in a nuclear environment of polarization, initiated by Professor Barushevski, been extensively studied in many different conditions: reflection, refraction, diffraction ... In this discussion, the resolution used this method to study: polarization vector of scattered neutrons from ferrous crystal surfaces in the totally reflected conditions.

Keywords

polarization vector, polarized neutrons, polarized nuclei, the totally reflected conditions.

XÁC ĐỊNH TEST KIỂM TRA SỨC MẠNH CHO VẬN ĐỘNG VIÊN NAM CÂU LẠC BỘ BÓNG ĐÁ SINH VIÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

Đan Thành Vinh

Bộ môn Giáo dục Thể chất, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Bằng phương pháp quan sát, phương pháp phân tích – tổng hợp tài liệu và phương pháp toán học thống kê, bài báo xác định được 5 test kiểm tra sức mạnh cho vận động viên nam câu lạc bộ bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp.

Từ khoá: *Test, sức mạnh, vận động viên, câu lạc bộ, bóng đá.*

MỞ ĐẦU

Bóng đá nói chung và bóng đá sinh viên nói riêng là môn Thể thao (TT) hấp dẫn với hầu hết các thế hệ thanh niên, sinh viên các quốc gia trên thế giới; cũng như thanh niên, sinh viên Việt Nam. Nhiều tài năng bóng đá trên thế giới được phát hiện và trưởng thành từ phong trào bóng đá sinh viên,…

Chính sự phát triển của phong trào bóng đá sinh viên đã góp phần vào việc rèn luyện thân thể cho sinh viên trong các trường Cao đẳng và Đại học trên toàn quốc. Do vậy tôi nhận thấy rằng, việc mở rộng phong trào bóng đá trong sinh viên sẽ góp phần nâng cao chất lượng Giáo dục thể chất cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp.

Qua tìm hiểu, quan sát các buổi tập luyện và thi đấu của Câu lạc bộ (CLB) bóng đá nam sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp; tôi nhận thấy thể lực của các cầu thủ còn yếu và không đồng đều, đặc biệt là tố chất thể lực sức mạnh. Điều này thể hiện rõ qua các tình huống tranh chấp, các pha tỳ đè đối phương, sút cầu môn, tranh cướp bóng trên không,…cầu thủ của CLB bóng đá nam sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp thường yếu thế hơn đối phương, chính vì vậy mà thành tích thi đấu của đội tuyển chưa cao. Thực trạng này có thể do nhiều nguyên nhân, nhưng nguyên nhân chính vẫn là việc tuyển chọn, kiểm tra và đánh giá trình độ thể lực chưa được coi trọng, CLB chưa có có tiêu chuẩn để tuyển chọn, kiểm tra và đánh giá trình độ thể lực của vận động viên (VĐV).

Xuất phát từ vấn đề trên, tôi đã tiến hành nghiên cứu:

"Xác định test kiểm tra sức mạnh cho vận động viên nam Câu lạc bộ bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp".

Nhiệm vụ chính của nghiên cứu này là xác định các test kiểm tra sức mạnh cho VĐV nam CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp.

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Phương pháp phân tích và tổng hợp tài liệu
- Phương pháp phỏng vấn và toạ đàm
- Phương pháp quan sát sư phạm
- Phương pháp kiểm tra sư phạm
- Phương pháp toán học thống kê

KẾT QUẢ VÀ BÌNH LUẬN

1. Xác định tầm quan trọng của tố chất sức mạnh trong môn Bóng đá.

Để đánh giá một cách chính xác tầm quan trọng của tố chất sức mạnh trong môn Bóng đá, tôi tiến hành phỏng vấn các Huấn luyện viên (HLV), chuyên gia và giáo viên,.... môn bóng đá ở các tỉnh như: Thái Nguyên, Hà Nội, Bắc Ninh,....với số phiếu phát ra 38 phiếu và số phiếu thu về 36 phiếu.

Bảng 1. Kết quả phỏng vấn tầm quan trọng của các tố chất thể lực trong môn bóng đá (n = 36)

Các tố chất	Mức độ quan trọng					
	Rất quan trọng		Quan trọng		Không quan trọng	
	m_i	%	m_i	%	m_i	%
Sức nhanh	31	86.1	5	13.9	0	0
Sức mạnh	34	94.4	2	5.6	0	0
Sức bền	28	77.8	8	22.2	0	0
Mềm dẻo	25	69.4	11	30.6	0	0
Khả năng phối hợp vận động	32	88.9	4	11.1	0	0

Kết quả phỏng vấn cho thấy, trong môn bóng đá tố chất sức mạnh được các nhà chuyên môn đánh giá cao nhất, chiếm 94.4% là rất quan trọng. Vì vậy có thể nói, sức mạnh là tố chất quan trọng hàng đầu trong môn bóng đá.

2. Đánh giá thực trạng công tác kiểm tra và đánh giá sức mạnh ở CLB bóng đá nam sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp.

Qua quan sát các buổi tập luyện thể lực của CLB bóng đá nam sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, cũng như phỏng vấn trực tiếp các giáo viên, HLV làm công tác giảng dạy và huấn luyện tại CLB về việc sử dụng các nội dung trong kiểm tra, đánh giá sức mạnh cho VĐV bóng đá ở CLB cho thấy:

- Để đánh giá thể lực cho VĐV của CLB thì đều dựa vào kinh nghiệm của các giáo viên, HLV mà chưa có nghiên cứu về tiêu chuẩn đánh giá thể lực một cách khoa học.
- Qua trao đổi với các giáo viên, HLV còn nhận thấy, CLB không có bảng phân loại mà chỉ dựa trên việc tập luyện của từng VĐV.

3. Lựa chọn các test đánh giá sức mạnh cho VĐV nam CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

Qua phân tích, tổng hợp các tài liệu có liên quan tới huấn luyện sức mạnh của VĐV bóng đá, các tài liệu liên quan đến kiểm tra đánh giá trình độ tập luyện và đặc điểm của VĐV bóng đá,…Đặc biệt là qua quan sát các buổi tập, các buổi kiểm tra định kỳ, cũng như các buổi tuyển chọn VĐV tại các lớp năng khiếu bóng đá,... của một số địa phương và trao đổi, phỏng vấn trực tiếp các chuyên gia, giáo viên, HLV có nhiều kinh nghiệm.... Tôi

đã thu thập được 25 test kiểm tra đánh giá sức mạnh cho VĐV bóng đá

Sự lựa chọn các test ở trên dẫu sao mới chỉ là căn cứ vào cơ sở lý luận mà tôi đã nêu ở trên. Điều quan trọng là phải xác định được mức độ phù hợp của chúng với đối tượng nghiên cứu, mà ở đây là VĐV nam CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp. Tôi đã tiến hành phỏng vấn các giáo viên, HLV, chuyên gia có nhiều kinh nghiệm đang làm công tác huấn luyện, giảng dạy môn bóng đá tại các trường, trung tâm TDTT của các tỉnh như: Thái Nguyên, Hà Nội, Bắc Ninh,.... về mức độ phù hợp của các test trong kiểm tra – đánh giá. Để đảm bảo sự thống nhất cao, tôi chỉ lựa chọn những test được từ 75% các nhà chuyên môn đánh giá là rất quan trọng để đưa vào nghiên cứu các bước tiếp theo.

Với số phiếu phát ra 38, số phiếu thu về 32 (*trong đó có 11 HLV, chiếm 34.4%; 01 chuyên gia, chiếm 3.1%; 20 giáo viên môn bóng đá, chiếm 62.5%*), căn cứ vào kết quả phỏng vấn, Tôi đã lựa chọn được 05 test phù hợp với quy định của. Đó là các test sau:

1. Đá bóng xa (m)
2. Ném biên không đà (m)
3. Bật xa tại chỗ (cm)
4. Bật cao tại chỗ với bảng (cm)
5. Tại chỗ đánh đầu (m)

4. Xác định tính thông báo và độ tin cậy của các test

Sau khi đã lựa chọn được 05 test sức mạnh thông qua phỏng vấn, tôi tiến hành kiểm tra trên đối tượng nghiên cứu là 28 VĐV nam của CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp để xác định tính thông báo và độ tin cậy của các test đó. Trước khi xác định tính thông báo và độ tin cậy của các test kiểm tra, tôi kiểm chứng tính chất đồng đều của các test.

Bảng 2. Kết quả xác định mức độ đồng đều của các Test (n = 28)

TT	Test	$\bar{x} \pm \delta$	C_v (%)
1.	Đá bóng xa (m)	43.68 ± 2.47	5.65
2.	Ném biên không đà (m)	17.36 ± 1.08	6.22
3.	Tại chỗ đánh đầu (m)	14.65 ± 0.68	4.64
4.	Bật xa tại chỗ (cm)	198.52 ± 11.27	5.68
5.	Bật cao tại chỗ với bảng (cm)	264.67 ± 13.25	5.01

Kết quả cho thấy: Với C_v = 4.64% đến 6.22% < 10%. Vậy các Test đảm bảo tính đồng đều và cho phép sử dụng để kiểm tra đánh giá sức mạnh cho VĐV nam CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp.

*** Xác định tính thông báo**

Để xác định tính thông báo, tôi sử dụng các test và tiêu chuẩn công nhận đẳng cấp trong môn bóng đá của trường Đại học TDTT Bắc Ninh để kiểm tra và phân hạng đối tượng nghiên cứu. Sau đó tính mối tương quan giữa thứ hạng với kết quả kiểm tra 05 test sức mạnh đã lựa chọn được.

Bảng 3. Hệ số tương quan giữa kết quả kiểm tra với kết quả phân hạng đối tượng nghiên cứu (n=28)

TT	Test	$\bar{x} \pm \delta$	r	P
1.	Đá bóng xa (m)	43.68 ± 2.47	0.74	< 0.05
2.	Ném biên không đà (m)	17.36 ± 1.08	0.73	< 0.05
3.	Tại chỗ đánh đầu (m)	14.65 ± 0.68	0.80	< 0.05
4.	Bật xa tại chỗ (cm)	198.52 ± 11.27	0.82	< 0.05
5.	Bật cao tại chỗ với bảng (cm)	264.67 ± 13.25	0.78	< 0.05

Kết quả thu được cho thấy, cả 05 test sức mạnh đã lựa chọn trên đối tượng nghiên cứu, có mối tương quan mạnh với kết quả phân hạng đối tượng nghiên cứu. Với $r_{tính}$= 0.73 đến 0.82 > 0.6 và > $r_{bảng}$ = 0.3494, với P < 0.05. Vậy chúng đảm bảo tính thống báo, được tôi đưa vào tiến hành tổ chức nghiên cứu ở các giai đoạn tiếp theo.

*** Xác định độ tin cậy của các test**

Sau khi xác định được 05 test sức mạnh đảm bảo tính thông báo, tôi tiếp tục xác định độ tin cậy của chúng bằng phương pháp test lặp lại. Việc kiểm nghiệm được tiến hành trên 28 VĐV nam của CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp, được tiến hành kiểm tra trong một ngày, mỗi test kiểm tra 2 lần trong cùng một buổi, lần 2 được tiến hành khi VĐV đã được hồi phục hoàn toàn, các điều kiện kiểm tra giữa hai lần là như nhau. Sau đó tính tương quan giữa kết quả hai lần lập test. Nếu các test có hệ số tương quan mạnh chứng tỏ có độ tin cậy cao.

Bảng 4. **Hệ số tương quan giữa 2 lần lập test ở VĐV nam các CLB bóng đá sinh viên các trường thuộc đại học Thái Nguyên (n=28)**

TT	Test	Lần 1	Lần 2	r	p
1.	Đá bóng xa (m)	43.68 ± 2.47	44.07 ± 2.56	0.83	< 0.05
2.	Ném biên không đà (m)	17.36 ± 1.08	17.43 ± 1.13	0.87	< 0.05
3.	Tại chỗ đánh đầu (m)	14.65 ± 0.68	14.51 ± 0.72	0.85	< 0.05
4.	Bật xa tại chỗ (cm)	198.52 ± 11.27	196.79 ± 11.25	0.84	< 0.05
5.	Bật cao tại chỗ với bảng (cm)	264.67 ± 13.25	267.17 ± 13.54	0.81	< 0.05

Kết quả cho thấy, cả 5 test kiểm tra đều có mối tương quan mạnh giữa kết quả của 2 lần kiểm tra. Với $r_{tính}$= 0.81 đến 0.87 > 0.80 và $r_{bảng}$ = 0.3494, với P < 0.05. Điều đó cho thấy các test trên đây đều thể hiện mối tương quan mạnh, có đầy đủ tính thông báo, đủ độ tin cậy, mang tính khả thi và phù hợp với đối tượng nghiên cứu cũng như điều kiện thực tiễn trong việc đánh giá sức mạnh cho VĐV nam CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp.

KẾT LUẬN

Qua các bước nghiên cứu lý luận và thực tiễn đã xác định được 05 test sức mạnh cho VĐV nam CLB bóng đá sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp đảm bảo tính thông báo và độ tin cậy cần thiết bao gồm

1. Đá bóng xa (m)
2. Ném biên không đà (m)
3. Bật xa tại chỗ (cm)
4. Bật cao tại chỗ với bảng (cm)
5. Tại chỗ đánh đầu (m)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dương nghiệp chí (1987), *Phương pháp lập test đánh giá khả năng tập luyện trong thể thao*, Bản tin khoa học kỹ thuật TDTT.

[2] Harre D (1996), *Học thuyết huấn luyện*, NXB TDTT Hà Nội. Dịch: Trương Anh Tuấn, Bùi Thế Hiển.

[3] Ngô Ích Quân (2007), *Nghiên cứu các bài tập phát triển sức mạnh đối với vận động viên nam 15 - 17 tuổi*, Luận án tiến sĩ giáo dục học, Viện khoa học TDTT, Hà Nội.

IDENTIFY STRENGTH TESTS FOR MALE ATHLETES OF STUDENTS' FOOTBALL CLUB OF THAI NGUYEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Dan Thanh Vinh

Department of Physical Education, Faculty of Fundamental Sciences, TNUT

SUMMARY

The information is gathered and then analyzed and investigated by observational method, as well as statistical mathematics method to reach the goal of this paper: identify 5 strength tests for male athletes of students' football club of Thai Nguyen University of Technology

Key words: *Tests, strength, Athletes, club, football.*

ĐÁNH GIÁ THỰC TRẠNG THỂ LỰC VÀ LỰA CHỌN GIẢI PHÁP NHẰM NÂNG CAO TỐ CHẤT THỂ LỰC CHO SINH VIÊN K50 TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP THÁI NGUYÊN

Lưu Thanh Nga

Bộ môn Giáo dục Thể chất, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Qua thực tiễn giảng dạy cho thấy, tố chất thể lực có vai trò quan trọng trong học tập nói chung và môn GDTC nói riêng, song chưa đáp ứng được yêu cầu. Đánh giá thực trạng và lựa chọn giải pháp nhằm nâng cao tố chất thể lực cho sinh viên K50 trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên là việc làm thiết thực mang lại hiệu quả cao trong việc nâng cao chất lượng giảng dạy môn GDTC trong nhà trường.

TỪ KHÓA

Giáo dục thể chất, Trình độ thể lực, giải pháp, sinh viên, hiệu quả...

MỞ ĐẦU.

GDTC trong nhà trường nói chung và nâng cao tố chất thể lực nói riêng là nhiệm vụ của nhà trường các cấp. Nhận thức được điều đó, trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên đã và đang đầu tư, trang bị về cơ sở vật chất phục vụ công tác GDTC nên việc nâng cao tố chất thể lực (TCTL) cho sinh viên cũng như chất lượng giờ học thể chất đã được ngày càng được cải thiện hơn. Nhưng trước những đòi hỏi ngày càng cao của công tác GDTC trong nhà trường, trong điều kiện cơ sở vật chất còn nhiều thiếu thốn, nhận thức về vai trò, tác dụng của môn GDTC trong sinh viên còn hạn chế, sự tác động của nhiều yếu tố làm ảnh hưởng đến tố chất thể lực cũng

như chất lượng giờ học GDTC trong nhà trường ... thì việc làm thế nào để nâng cao thể lực cho sinh viên là một việc làm không dễ.

Trên cơ sở đó việc đánh giá thực trạng và lựa chọn giải pháp nhằm nâng cao trình độ thể lực cho sinh viên trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên có giá trị thực tiễn trong việc nâng cao hiệu quả giảng dạy và chất lượng đào tạo của nhà trường. Xuất phát từ những lý do trên tôi tiến hành nghiên cứu: "*Đánh giá thực trạng thể lực và lựa chọn giải pháp nhằm nâng cao tố chất thể lực cho sinh viên K50 trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên .*"

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Phương pháp tham khảo tài liệu.
- Phương pháp phỏng vấn tọa đàm.
- Phương pháp quan sát sư phạm.
- Phương pháp toán học thống kê.

KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU.

1. Đánh giá thực trạng tố chất thể lực của sinh viên K50 trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên.

- Để đánh giá thực trạng thể lực của sinh viên trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên đề tài đã thực hiện theo các bước:

+ Một là: Đánh giá thực trạng trình độ thể lực qua 5 chỉ tiêu ở đầu học kỳ đầu tiên của đối tượng nghiên cứu.

+ Hai là: So sánh sự phát triển TCTL của sinh viên theo các giai đoạn đầu học kỳ và cuối học kỳ.

+ Ba là: Đánh giá thực trạng TCTL của sinh viên trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên theo tiêu chuẩn RLTT.

Bảng 1: **Thực trạng trình độ thể lực của sinh viên K50 trường Đại học KTCN Thái Nguyên(n=160).**

TT	**Chỉ tiêu**	$\overline{X} + \delta$	
K50		**Nam (n=100)**	**Nữ (n=60)**
1	Chạy 30m XPC (s)	5,85±0,20	6,81±0,27
2	Bật xa tại chỗ (cm)	196,7±2,92	147,2±3,05
3	Nằm ngửa gập bụng 30 giây (l)	15,1±3,42	13,06±1,54
4	Chạy tùy sức 5 phút (m)	912±35,1	786±30,1
5	Chạy con thoi 4 x 10m (s)	13,61±0,39	13,19±0,27

Từ thực trạng kiểm tra các chỉ tiêu về thể lực của sinh viên nam, nữ K50 của trường cho thấy, tất cả các chỉ tiêu thể lực của sinh viên đều dao động quanh mức trung bình của tiêu chuẩn rèn luyện thân thể do Bộ giáo dục - Đào tạo đề ra. Bước tiếp theo đề tài so sánh sự phát triển TCTL của sinh viên ở hai thời điểm đầu và cuối học kỳ, kết quả được trình bày ở bảng 2.

Bảng 2: **So sánh phát triển TCTL của sinh viên đầu học kỳ và cuối học kỳ I**

TT	**Chỉ tiêu**	**Nam(n=100)**	**Nữ (n=60)**

		t	p	t	p
1	Chạy 30m XPC (s)	1,56	> 0,05	1,22	> 0,05
2	Bật xa tại chỗ (cm)	1,16	> 0,05	1,67	> 0,05
3	Nằm ngửa gập bụng 30 giây (l)	1,89	> 0,05	1,14	> 0,05
4	Chạy tùy sức 5 phút (m)	1,27	> 0,05	1,47	> 0,05
5	Chạy con thoi 4 x 10m (s)	1,87	> 0,05	1,84	> 0,05

Từ kết quả so sánh thể lực của sinh viên giữa hai giai đoạn cho thấy sự khác biệt chưa rõ ràng thể hiện kết quả t tính đều nhỏ hơn t bảng ở ngưỡng P>0,05, chứng tỏ sau một kỳ học tập thể lực của sinh viên chưa phát triển rõ rệt. Do đó cần thực hiện bước tiếp theo là so sánh với tiêu chuẩn RLTT. Đề tài lấy đại diện mẫu sinh viên K50 so sánh với tiêu chuẩn RLTT, kết quả được trình bày ở bảng 3.

Bảng 3: Thực trạng thể lực sinh viên trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên theo 5 tiêu chuẩn RLTT.

TT	Chỉ tiêu	Tổng số SV nam (n=100)				
		Chỉ tiêu RLTT (Mức đạt)	$\overline{X} \pm \delta$	C_v %	Số SV Đạt RLTT	Tỷ lệ %
1	Chạy 30m XPC (s)	6,00	6,06 ±0,20	7,12	73	**73,0**
2	Bật xa tại chỗ (cm)	198	198,7 ±6,1	9,21	69	**69,0**
3	Nằm ngửa gập bụng 30 giây (l)	16	16,5 ±3,2	7,23	58	**58,0**
4	Chạy tùy sức 5 phút (m)	920	919 ±28	4,82	44	**44,0**
5	Chạy con thoi 4 x10m (s)	12,60	12,65 ±0,20	6,01	53	**53,0**
Tổng số học SV nữ (n=60)						
1	Chạy 30m XPC (s)	7,00	7,00 ±0,19	4,59	41	**68,3**
2	Bật xa tại chỗ (cm)	150	150,2± 2,6	6,72	42	**70,0**
3	Nằm ngửa gập bụng 30	13	13,0 ±1,5	4,31	38	**63,3**

	giây (l)					
4	Chạy tùy sức 5 phút(m)	810	801 ±16	5,34	29	**48,3**
5	Chạy con thoi 4x10 m (s)	13,30	13,31± 0,32	6,77	31	**51,7**

Qua bảng 3 ta thấy: so với tiêu chuẩn RLTT của Bộ giáo dục - Đào tạo vẫn còn tỷ lệ lớn sinh viên chưa đạt chuẩn. Do đó lựa chọn giải pháp để nâng cao tố chất thể lực cho sinh viên K50 trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên là điều thiết yếu và cần thiết giúp nâng cao hiệu quả công tác GDTC.

2. Lựa chọn giải pháp nhằm nâng cao tố chất thể lực cho sinh viên K50 trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên.

Để lựa chọn giải pháp nâng cao TCTL của sinh viên K50 trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên đề tài đã căn cứ vào những nguyên tắc sau:

- Nguyên tắc tính thực tiễn (các giải pháp phải xuất phát từ thực tiễn của điều kiện dạy học của nhà trường).

- Nguyên tắc tính đồng bộ (các giải pháp đa dạng nhiều mặt và trực tiếp giải quyết các vấn đề của thực tiễn).

- Nguyên tắc tính khả thi (các giải pháp đề xuất phải có được khả năng thực thi).

- Nguyên tắc bảo đảm tính khoa học (các giải pháp phải mang tính khoa học và giải quyết vấn đề một cách khoa học).

Từ những nguồn tài liệu tham khảo khác nhau đề tài lựa chọn được một số giải pháp để phỏng vấn chuyên gia là các thầy cô trong bộ môn GDTC, thầy cô có kinh nghiệm trong công tác quản lý cho kết quả ở bảng 4.

Bảng 4. Kết quả phỏng vấn lựa chọn giải pháp nhằm nâng cao TCTL của sinh viên K50 trường Đại học KTCN TN (n=14).

TT	Giải pháp	Đồng ý	Tỷ lệ %
1.	Nâng cấp, tu sửa sân bãi và dụng cụ tập luyện phục vụ cho công tác GDTC	13	92.86
2	Xây dựng cấu trúc giờ học GDTC hợp lý	10	71.43
3	Cải tiến kế hoạch, nội dung bài tập giảng dạy	14	100
4	Xây dựng hứng thú bền vững cho học sinh	9	64.29
5	Nâng cao kỷ luật cho học sinh	12	85.71
6	Cải tiến phương pháp tổ chức giờ học GDTC	14	100
7	Đảm bảo tốt bồi dưỡng chuyên môn cho đội ngũ giáo viên	12	85.71
8	Tăng cường tổ chức hoạt động ngoại khoá	13	92.86

9	Tăng cường các bài tập thể lực cho học sinh	8	57.14

Từ kết quả bảng 4 đề tài lựa chọn được 05 giải pháp nhằm nâng cao TCTL của sinh viên K50 trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghiệp Thái Nguyên với ý kiến tán thành từ 90% trở lên, đó là:

+ Giải pháp 1: Nâng cấp, tu sửa sân bãi và dụng cụ tập luyện phục vụ cho công tác GDTC

+ Giải pháp 2: Cải tiến kế hoạch, nội dung bài tập giảng dạy

+ Giải pháp 3: Cải tiến phương pháp tổ chức giờ học GDTC

+Giải pháp 4: Đảm bảo tốt bồi dưỡng chuyên môn cho đội ngũ giáo viên

+ Giải pháp 5: Tăng cường tổ chức hoạt động ngoại khoá

05 giải pháp đã lựa chọn có nội dung cụ thể như sau:

a- Nâng cấp,tu sửa sân bãi và dụng cụ tập luyện phục vụ cho công tác GDTC.

**** Mục đích:***

Tạo điều kiện thuận lợi cho công tác giảng dạy của giảng viên và luyện tập của sinh viên.

**** Cách tiến hành:***

- Tiến hành cải tạo, sửa chữa nâng cấp cơ sở tập luyện: sân bãi, dụng cụ phục vụ giảng dạy cho chính khóa và hoạt động ngoại khóa.

- Tăng cường công tác quản lý quy hoạch, bảo dưỡng phương tiện dụng cụ thể thao.

- Trang bị thêm dụng cụ mới thay dụng cụ đã dùng nhiều năm.

b- Cải tiến kế hoạch, nội dung bài tập giảng dạy.

**** Mục đích:***

- Tăng thêm hứng thú tập luyện cho học sinh, tận dụng những mặt về cơ sở vật chất của nhà trường và điều kiện thời tiết.

- Tận dụng được mặt thuận lợi của môn học trước đó vào các giáo án sau.

**** Cách tiến hành:***

- Khuyến khích giáo viên dạy 2 - 3 nội dung trong một tiết học nhằm nâng cao chất lượng giờ dạy.

- Giáo viên có thể thực hiện lồng ghép hoặc phân phối chương trình trong cùng một kỳ học nhằm nâng cao hứng thú tập luyện cho sinh viên.

c- Cải tiến phương pháp tổ chức giờ học GDTC.

**** Mục đích:***

- Phương pháp tổ chức giờ học GDTC giúp sinh viên tiếp thu kỹ thuật động tác nhanh hơn.

- Tăng cường độ và khối lượng vận động, phát triển thể lực cho sinh viên.

- Giúp sinh viên dễ dàng tiếp thu kỹ thuật mới đồng thời làm cho giờ học trở nên sinh động, gây hứng thú cho sinh viên.

**** Cách tiến hành:***

- Trong thời gian quy định của mỗi tiết học giáo viên rút ngắn thời gian giải thích bằng cách sử dụng nhiều phương pháp có hiệu quả cao như: Thị phạm, xem tranh ảnh, băng hình... để tăng cường khả năng tư duy về kỹ thuật động tác.

- Việc sử dụng tranh ảnh được áp dụng trong giảng dạy động tác phát huy tác dụng tối đa ở giai đoạn sinh viên tiếp thu kỹ thuật động tác. Phương pháp này còn áp dụng trong những tiết học ngoài trời với điều kiện thời tiết không thuận lợi. Sử dụng các tranh ảnh băng hình sau: Các tranh về đội hình đội ngũ, bài tập phát triển chung, kỹ thuật chạy ngắn...

- Các giờ có 2 nội dung bài tập phát triển chung và đội hình đội ngũ sau khi giới thiệu và giao nhiệm vụ cho buổi tập giáo viên phân làm nhiều nhóm tập, mỗi nhóm tập một nội dung có giáo viên hoặc cán sự lớp, nhóm trưởng điều khiển và hướng dẫn tập luyện.

- Đối với giờ có nội dung chạy ngắn giáo viên tăng cường sử dụng phương pháp phân nhóm và phương pháp "dòng chảy" để tăng mật độ của buổi tập.

- Bên cạnh đó sử dụng phương pháp trò chơi và thi đấu có khen thưởng nhằm tạo tính cạnh tranh thi đua của nhóm học sinh vào tập luyện và tạo hứng thú trạng, thái thoải mái cho người học. Đối với phương pháp trò chơi sử dụng những trò chơi có hoạt động vận động gần giống với nội dung tập luyện hoặc có tác dụng bổ trợ các kỹ thuật động tác cho các em.

- Xác định mật độ chung 85% mật độ động đạt 40% của buổi tập trong các giờ học.

d- Tăng cường tổ chức các hoạt động ngoại khoá.

**** Mục đích:***

- Sinh viên sẽ củng cố và nắm vững những kỹ năng kỹ xảo vận động cơ bản và kỹ thuật của những môn thể thao đã học trong giờ chính khoá, nâng cao thể chất và tinh thần.

**** Cách tiến hành:***

- Tiến hành tổ chức học ngoại khoá cho sinh viên 2 tiết trên một tuần.

- Tăng cường việc thành lập và duy trì các câu lạc bộ các môn thể thao như Bóng Rổ, Bóng Đá, Bóng Chuyền, Cầu Lông, Đá Cầu....

- Tổ chức thường xuyên các cuộc thi đấu thể thao. Đây là một hình thức ngoại khoá rất hiệu quả để phát triển thể lực cho sinh viên cũng như nâng cao nhận thức của sinh viên về giờ học GDTC.

e- Đảm bảo tốt bồi dưỡng chuyên môn cho đội ngũ giáo viên.

**** Mục đích:***

- Tăng cường bồi dưỡng nâng cao nghiệp vụ chuyên môn cho giảng viên thông qua các giờ sinh hoạt chuyên môn, cử giảng viên tham gia các lớp tập huấn nhằm tiếp thu các kỹ thuật và sự thay đổi về điều luật mới.

**** Cách tiến hành:***

- Tăng cường giáo dục tư tưởng nâng cao ý thức trách nhiệm đối với giờ lên lớp, rèn luyện tác phong sư phạm của người giảng viên.

- Giảng viên thường xuyên học tập, rèn luyện, tham khảo, cập nhật tài liệu chuyên môn về lý luận và thực hành.

- Giảng viên tự đánh giá và rút kinh nghiệm trong từng giờ lên lớp.

KẾT LUẬN.

- Qua đánh giá thực trạng TCTL của sinh viên K50 cho thấy còn nhiều sinh viên chưa đạt tiêu chuẩn RLTT. Các sinh viên này qua một giai đoạn học tập chưa có sự cải thiện về thể lực rõ rệt khi chưa đảm bảo được ở ngưỡng thống kê cần thiết.

- Căn cứ các nguyên tắc đề tài đã lựa chọn được 05 giải pháp trên tổng số 09 giải pháp được phỏng vấn. Kết quả thu được các giải pháp có ý kiến tán thành từ 80% trở lên, các giải pháp đó là:

+ Giải pháp 1: Nâng cấp, tu sửa sân bãi và dụng cụ tập luyện phục vụ cho công tác GDTC

+ Giải pháp 2: Cải tiến kế hoạch, nội dung bài tập giảng dạy

+ Giải pháp 3: Cải tiến phương pháp tổ chức giờ học GDTC

+ Giải pháp 4: Đảm bảo tốt bồi dưỡng chuyên môn cho đội ngũ giáo viên

+ Giải pháp 5: Tăng cường tổ chức hoạt động ngoại khoá.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. *Luật giáo dục (2005),* NXB Giáo dục, Hà Nội.

[2]. Vũ Đức Thu, Nguyễn Trọng Hải, Phùng Thị Hoà, Vũ Bích Huệ (1998), *Nghiên cứu đánh giá thực trạng giáo dục thể chất và phát triển TDTT trong nhà trường các cấp, tuyển tập khoa học giáo dục thể chất trong nhà trường các cấp*", NXB TDTT.

[3]. Đồng Văn Triệu, Lê Anh Thơ (2000), *Lý luận và phương pháp giáo dục thể chất trong trường học*, NXB TDTT.

[4]. Một số luận văn thạc sĩ, tiến sĩ trường Đại học TDTT Bắc Ninh.

SUMMARY

Physical education has played a crucial role in the education system. Recognizing the importance of teaching Physical Education, in recent years, the Physical Education department in Thai Nguyen University of technology has constantly focused on researching and solving many fields related to the work of Physical Education Teaching , and one of them is to improve student fitness. Through teaching practices, student fitnessplays an important role in learning not only Physical Education but also other subjects, but the fact that the fitness of students dose not meet demand. Assessing the situations and choose solutions, to enhance physical qualities for the K50 students in Thai Nguyen University of technology is an essential work to bring a highly effectiveness in improving the quality of teaching Physical Education.

Keywords

Physical education, *Physical level, solutions and students, effective ...*

CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN

Lê Bích Ngọc

Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

TÓM TẮT

Ta đã biết bài toán cực trị thuộc vào một trong các bài toán gần với những ứng dụng thực tế nhất. Những bài toán về khoảng cách ngắn nhất, thể tích lớn nhất, tổng chi phí ít nhất … là những yêu cầu tự nhiên xuất phát từ những bài toán của sản xuất, đời sống và khoa học. Tác giả viết bài báo nhằm nêu một số ví dụ thực tế của bài toán cực trị của hàm hai biến.

Từ khóa

Cực trị, cực đại, cực tiểu, điểm tới hạn, giá trị cực đại, giá trị cực tiểu,…

NỘI DUNG

Định nghĩa: Cho hàm số z = f(x,y) xác định trong miền D nào đó, $M_0(x_0; y_0)$ là một điểm trong của D. Ta nói rằng f(x,y) đạt cực trị tại M_0 nếu với mọi điểm M trong một lân cận nào đó của M_0 nhưng khác M_0, hiệu số $f(M) – f(M_0)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(M) – f(M_0) > 0$, M_0 gọi là điểm cực tiểu, $f(M_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu.

Nếu $f(M) – f(M_0) < 0$, M_0 gọi là điểm cực đại, $f(M_0)$ được gọi là giá trị cực đại.

Nếu $f(M) – f(M_0) > 0$ (<0) với mọi điểm M thuộc miền D thì $f(M_o)$ chính là giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) của hàm số f(x,y). Cực trị của hàm số được gọi là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất địa phương.

Định lý: Nếu hàm số f(x,y) đạt cực trị tại M_0 mà tại đó các đạo hàm riêng $f'_x; f'_y$ tồn tại thì các đạo hàm riêng đó bằng 0 tại M_0: $f'_x(M_0) = f'_y(M_0)$

Định lý trên là điều kiện ắt có của cực trị, nó cho phép thu hẹp việc tìm cực trị của hàm số tại những điểm ở đó cả f'_x và f'_y triệt tiêu hoặc không tồn tại. Những điểm đó được gọi là điểm tới hạn.

Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm số

$z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = f(x, y)$

Bài giải: $f'_x = 2x - 2 = 0; f'_y = 2y - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 2.$

Vậy hàm số có điểm tới hạn M(1, 2).

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1 \ \forall (x, y).$

f(1, 2) = 1 là giá trị cực tiểu và đó chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số. (f(x, y) chính là paraboloit eliptic có đỉnh là (1, 2, 1)).

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số $z = y^2 - x^2$

Bài giải: $f'_x = -2x = 0; f'_y = 2y = 0$

$\Rightarrow$ điểm tới hạn (0, 0)

Với những điểm trên trục Ox :

$f(x, 0) = -x^2 < 0$ (trừ tại gốc O)

Với những điểm trên trục Oy :

$f(0, y) = y^2 > 0$ (trừ tại gốc O)

Vậy tại lân cận của O chứa những điểm mà f đạt giá trị âm cũng như những điểm làm f đạt giá trị dương.

Do vậy f(0, 0) = 0 không là giá trị cực trị của f. Do đó f không có cực trị.

Ví dụ 2 chỉ ra rằng thực tế một hàm số có thể không đạt cực trị tại điểm tới hạn. Ta cần xác định khi nào một hàm số đạt cực trị tại điểm tới hạn.

Định lý: Giả sử z = f(x, y) có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của $M_0(x_0, y_0)$. Giả sử tại M_0 ta có $f'_x = f'_y$. Đặt

$$D = \left[f''_{xy}(M_0) \right]^2 - f''_{xx}(M_0).f''_{yy}(M_0)$$

Khi đó tại M_0 :

Nếu D < 0 thì f(x, y) đạt cực tiểu nếu $f''_{xx}(M_0) > 0$, đạt cực đại nếu $f''_{xx}(M_0) < 0$.

Nếu D > 0 thì f(x, y) không đạt cực trị tại M_0.

Nếu D = 0 thì f(x, y) có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại M_0.

Trong trường hợp D = 0, ta phải xét chi tiết hơn. Cụ thể, ta cho x và y những số gia Δx và Δy đủ nhỏ rồi xét dấu của

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Nếu $\Delta f > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu, nếu $\Delta f < 0$ thì M_0 là điểm cực đại. Nếu Δf không xác định dấu thì M_0 không là điểm cực trị.

Ví dụ 3: Tìm cực trị của hàm số

$z = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y$

Bài giải: Ta có

$$z'_x = 3x^2 - 3 = 0 \, ; z'_y = 6y^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1; y = \pm 1.$$

Vậy có 4 điểm tới hạn:

$M_1(1, 1)$; $M_2(-1, 1)$;

$M_3(1, -1)$; $M_4(-1, -1)$

$z''_{xx} = 6x; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 12y$;

$D = 0 - 36xy$

Tại M_1: D = - 72 < 0, $z''_{xx}(M_1) = 6 > 0$, vậy M_1 là điểm cực tiểu.

Tại M_3 : D = - 72 < 0, $z''_{xx}(M_3) = -6 < 0$, vậy M_3 là điểm cực tiểu.

Tại M_2 và M_4 : D = 72 > 0 vậy M_2 và M_4 không là điểm cực trị.

Ví dụ 4: Tìm cực trị của hàm số

$z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Bài giải: Giải hệ $z'_x = 4x^3 - 4(x-y) = 0$;

$z'_y = 4y^3 + 4(x-y) = 0$

Ta tìm được các điểm tới hạn:

$M_1(0,0); M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}); M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$D = 4^2 - (12x^2 - 4)(12y^2 - 4)$

Tại M_2, M_3 : D < 0, $z''_{xx}(M_{23}) > 0$, vậy hàm số đạt cực tiểu tại M_2, M_3, $z_{min} = -8$.

Tại $M_1(0, 0)$: D = 0

Ta xét $z(M) - z(M_0)$ với M thuộc lân cận của M_0.

$z(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0$

$= z(M_0)$ với $|x| < 2$;

$z(x, x) = 2x^4 > 0 = z(M_0) \; \forall x \neq 0$;

Ta thấy dấu của $z(M) - z(M_0)$ thay đổi khi M chạy trong lân cận của M_0. Vậy hàm số không đạt cực trị tại M_0.

Ví dụ 5: Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm A(2,0,–3) tới mặt phẳng (P) x + y + z = 1.

Bài giải:

Ở phổ thông ta đã biết công thức tính khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

$$d(A,(P)) = \frac{|2+0-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Muốn tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) để $MA = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ta viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (P), đường thẳng này sẽ cắt (P) tại M. M chính là hình chiếu của A trên (P).

Ở đây ta sẽ giải bài toán này bằng cách áp dụng cực trị của hàm hai biến.

Khoảng cách từ điểm (x, y, z) tới điểm A(2, 0, –3) là: $d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2}$

Nếu (x, y, z) $\in$ (P) thì z = 1 – x – y nên

$d^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2$

$= (x-2)^2 + y^2 + (4-x-y)^2 = f(x,y)$

Ta có:

$f'_x = 2(x-2) - 2(4-x-y) = 4x + 2y - 12 = 0$

$f'_y = 2y - 2(4-x-y) = 2x + 4y - 8 = 0$

Hàm f(x, y) có điểm tới hạn là $M\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

$D = \left[f''_{xy}(M)\right]^2 - f''_{xx}(M) f''_{yy}(M) = 4 - 4.4 = -12 < 0$;

$f''_{xx}(M) = 4 > 0$

Vậy M là điểm cực tiểu, tức là khoảng cách từ M tới A là nhỏ nhất

$$d = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ví dụ 6: Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp được làm từ 12 m^2 bìa các tông. Tìm thể tích lớn nhất có thể có của cái hộp đó.

Bài giải: Gọi chiều dài và chiều rộng của đáy hộp là x, y; chiều cao của hộp là z.

Khi đó diện tích đáy là xy, thể tích hộp là V = xyz. Diện tích xung quanh và đáy hộp là 2xz + 2yz + xy = 12.

Từ đó $z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$, thay vào V, ta được

$$V = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

$$V'_x = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2}$$

$$V'_y = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

Các điểm tới hạn thỏa mãn x > 0, y > 0 là (2, 2), tại đó z = 1 nên V = 4 m^2.

Ta có thể sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai để tìm được một cực đại địa phương của V , hoặc có thể đoán được là phải có một GTLN cho thể tích của hộp, điều này xảy ra tại một điểm tới hạn của V, vậy nó xảy ra khi x = 2, y = 2, z = 1. Khi đó V = 4. Vậy GTLN thể tích của hộp là $4m^2$

Ví dụ 7: Tìm 3 số dương có tổng bằng 100 sao cho tích của chúng đạt giá trị lớn nhất.

Bài giải: Gọi 3 số cần tìm là x, y, z.

Ta có : x + y + z = 100,

đặt f = xyz = xy(100 – x – y)

$f'_x = y(100 - x - y) - xy = y(100 - 2x - y)$

$f'_x = x(100 - x - y) - xy = x(100 - x - 2y)$

Vậy điểm tới hạn thỏa mãn x > 0, y > 0 là

$$M\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$$

Ta lại có:

$f''_{xy} = 100 - 2x - 2y$; $f''_{xx} = -2y$; $f''_{yy} = -2x$

$D = (100 - 2x - 2y)^2 - 2y.2x$

Tại M: $D = -\frac{100000}{3} < 0$; $f''_{xx} = -\frac{200}{3} < 0$.

Vậy f đạt cực đại tại M.

$$f_{max} = \frac{100}{3}.\frac{100}{3}.\left(100 - \frac{100}{3} - \frac{100}{3}\right) = \frac{10^6}{27}$$

Ví dụ 8: Tìm 3 số dương có tổng là 12 sao cho tổng các bình phương của chúng đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài giải: Gọi 3 số cần tìm là x, y, z.

Ta có : x + y + z = 12,

đặt $f = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (12 - x - y)^2$

$f'_x = 2x - 2(12 - x - y) = -24 + 4x + 2y$

$f'_y = 2y - 2(12 - x - y) = -24 + 2x + 4y$

Vậy điểm tới hạn của f là (4, 4)

$D = 2^2 - 4.4 < 0$; $f''_{xx} = 4 > 0$

Vậy f đạt cực tiểu tại

x = 4, y = 4, z = 12 – 4 – 4 = 4, $f_{min} = 48$

Ví dụ 9: Tìm hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất nội tiếp hình cầu có bán kính 1.

Bài giải: Trong hệ tọa độ Oxyz, phương trình mặt cầu bán kính 1 là: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Khong hạn chế tính tổng quát, ta chỉ xét những hình hộp chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ, nội tiếp trong hình cầu. Gọi (x, y, z) là tọa độ của đỉnh hình hộp chữ nhật nằm trong góc phần tám thứ nhất. (x, y, z > 0).

Ta đi tìm cực đại của f = xyz.

Từ $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$\Rightarrow f = xyz = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$f'_x = \frac{y(1 - 2x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$f'_y = \frac{x(1 - x^2 - 2y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Ta có điểm tới hạn là $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$f''_{xy} = \frac{(1 - 2x^2 - 3y^2)(1 - x^2 - y^2) + y(y - 2x^2y - y^3)}{\left(1 - x^2 - y^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f''_{xy}(M) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$f''_{xx} = \frac{-4xy(1 - x^2 - y^2) + x(y - 2x^2y - y^3)}{\left(1 - x^2 - y^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f''_{xx}(M) = -\frac{4\sqrt{3}}{3};$$

Tương tự $f''_{yy}(M) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$D = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = -4 < 0$;

$f''_{xx}(M) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Vậy f đạt cực đại tại M.

Với $x = 1/\sqrt{3}; y = 1/\sqrt{3} \Rightarrow z = 1/\sqrt{3}$, hình hộp có thể tích lớn nhất là

$$V = 2x.2y.2z = \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Các ví dụ 7, 8, 9 có thể được giải theo phương pháp Larange của bài toán cực trị của hàm hai biến, vấn đề này xin phép không trình bày ở bài báo này.

KẾT LUẬN

Chúng ta đã biết ứng dụng chính của đạo hàm riêng là tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất. Bài báo đã nêu bật ứng dụng của đạo hàm riêng trong bài toán tìm cực trị của hàm hai biến, đặc biệt trình bày được một số ví dụ thực tế của bài toán tìm cực trị của hàm hai biến.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, Tập 3 – Phép tính Giải tích nhiều biến số,* NXB Giáo dục, 2004.

[2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Bài tập Toán học cao cấp, Tập 3 – Phép tính Giải tích nhiều biến số,* NXB Giáo dục, 2004.

[3] James Stewart, *Multivariable Calculus*, Brooks Cole, 2002.

THE MAXIMUM AND MINIMUM OF THE FUNCTION OF TWO VARIABLES

Le Bich Ngoc

Department of Mathematics, Faculty of General Sciences, Thai Nguyen University of Technology

SUMMARY

As we see, one of the main uses of ordinary derivatives is in finding maximum and minimum values. In this article, we see how to use partial derivatives to locate maxima and minima of the functions of two variables. In particular, in example 6 we will see how to maximize the volume of a box without a lid if wa have a fixed amount of cardboard to work with.

Keywords

Local maximum, local minimum, local minimum value, local maximum value, critical point.

ẢNH HƯỞNG CỦA CHIỀU DÀY LỚP VỎ LÊN TÍNH CHẤT QUANG CỦA CÁC CHẤM LƯỢNG TỬ CdSe/ZnS CẤU TRÚC LÕI VỎ

Nguyễn Thanh Tùng

Bộ môn Vật lý, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp

Tóm tắt

Trong hai thập kỷ gần đây, vật liệu nano đã và đang được quan tâm nghiên cứu do tầm quan trọng đối với những nghiên cứu khoa học cơ bản và những ứng dụng công nghệ tiềm năng của chúng. Trong đó những tính chất đặc biệt đáng quan tâm các chấm lượng tử đã gây hấp dẫn lớn trên phạm vi toàn thế giới vì khả năng ứng dụng rất cao của nó trong cả các vật dụng hàng ngày cũng như các máy móc cao cấp khác: chế tạo điốt phát quang, các dụng cụ quang điện, các laser chấm lượng tử, ổ nhớ quang học, dán nhãn huỳnh quang sử dụng trong y học, sinh học. Những loại chấm lượng tử được nghiên cứu rộng rãi hiện nay là những hợp chất thuộc nhóm $A_{II}B_{VI}$ như CdSe, ZnS, CdTe, CdS/CdSe, CdSe/ZnS… Trong tương lai không xa, các chấm lượng tử sẽ được ứng dụng trong các thiết bị lưu trữ dung lượng lớn, các thiết bị bảo mật, năng lượng mặt trời, máy tính lượng tử …

GIỚI THIỆU

Các chấm lượng tử (Quantum dots - QDs) còn được gọi là các nano tinh thể bán dẫn có kích thước cỡ vài nano mét (2-10nm). Chấm lượng tử giam giữ mạnh các điện tử, lỗ trống và các cặp điện tử - lỗ trống (còn gọi là

các exciton) theo cả ba chiều trong một khoảng cỡ bước sóng de Broglie của các điện tử. Những tính chất đặc biệt đáng quan tâm các chấm lượng tử đã gây hấp dẫn lớn trên phạm vi toàn thế giới vì khả năng ứng dụng rất cao của nó trong cả các vật dụng hàng ngày cũng như các máy móc cao cấp khác: chế tạo điốt phát quang, các dụng cụ quang điện, các laser chấm lượng tử, ổ nhớ quang học, dán nhãn huỳnh quang sử dụng trong y học, sinh học. Những loại chấm lượng tử được nghiên cứu rộng rãi hiện nay là những hợp chất thuộc nhóm $A_{II}B_{VI}$ như CdSe, ZnS, CdTe, CdS/CdSe, CdSe/ZnS… Trong tương lai không xa, các chấm lượng tử sẽ được ứng dụng trong các thiết bị lưu trữ dung lượng lớn, các thiết bị bảo mật, năng lượng mặt trời, máy tính lượng tử … Với những lí do trên chúng tôi đã tiến hành nghiên cứu: "***Ảnh hưởng của chiều dày lớp vỏ lên tính chất quang của các chấm lượng tử CdSe/ZnS cấu trúc lõi/vỏ***. "

1. TỔNG QUAN VỀ BÁN DẪN CdSe VÀ CdSe/ZnS

1.1 Bán dẫn khối CdSe

Bán dẫn CdSe được tạo thành từ ion Cd^{2+} và ion Se^{2-}, nguyên tử Cadmium(Cd) thuộc nhóm II trong bảng hệ thống tuần hoàn Mendeleev, có hai điện tử hóa trị trên quỹ đạo s: [Cd] = [Kr] $4d^{10}5s^2$, nguyên tử Selenium(Se) thuộc nhóm VI, có sáu điện tử hóa trị trên quỹ đạo s và p: [Se] = [Ar]$3d^{10}4s^24p^4$. Bán dẫn khối CdSe có độ rộng vùng cấm thẳng với E_g = 1,8 eV. Để kích thích quang bán dẫn này, các photon phải có năng lượng bằng (kích thích cộng hưởng) hoặc lớn hơn (kích thích không cộng hưởng) bề rộng vùng cấm. Với bề rộng vùng cấm như trên thì bước sóng phát xạ của phonon là $\lambda \approx 690$ nm.

1.2. Ảnh hưởng của trạng thái bề mặt tới phổ quang học

Đối với các tinh thể nano có kích thước nhỏ hơn 10nm thì số nguyên tử nằm trên bề mặt hạt là rất lớn, và khi kích thước của hạt giảm thì tỷ lệ diện tích bề mặt trên thể tích hạt là lớn. Ví dụ với chấm lượng tử CdSe có kích cỡ 1 nm thì có tới 99% các nguyên tử nằm trên bề mặt. Trên bề mặt nano tinh thể sẽ xuất hiện những sai hỏng cấu trúc và những liên kết treo, làm xuất hiện các trạng thái bẫy bề mặt nằm bên trong vùng cấm giống như các mức tạp chất nằm bên trong vùng cấm của vật liệu khối. Điện tử có thể hồi phục về các trạng thái này, gây các hồi phục không phát xạ hoặc hồi phục phát xạ bề mặt, làm giảm sự tái hợp phát xạ exciton nội tại trong các nano tinh thể. Như vậy các trạng thái bề mặt rất quan trọng đối với các tính chất vật lý, đặc biệt là đối với các tính chất quang của các chấm lượng tử.

Các hiệu ứng bề mặt có ảnh hưởng rất lớn đến các tính chất của các nano tinh thể, có thể làm biến đổi cấu trúc và thay đổi tính chất quang của các tinh thể nano. Trong nhiều trường hợp, bề mặt của các tinh thể nano xác định tính chất của các chúng hơn là kích thước. Với mục tiêu hạn chế những khả năng phát xạ liên quan đến các trạng thái bề mặt, tăng hiệu suất phát xạ và ổn định các tính chất quang, chúng tôi đã tiến hành bọc các chấm lượng tử CdSe bằng một lớp vỏ bán dẫn có bề rộng vùng cấm lớn hơn, ZnS (ZnS với E_g = 3,6 eV so với 1,8 eV của CdSe).

2.MÔ TẢ CÔNG NGHỆ CHẾ TẠO MẪU

Trong nghiên cứu của đề tài này, chúng tôi sử dụng phương pháp hóa học ướt cụ thể là phương pháp phân hủy các tiền chất hữu cơ – kim loại để chế tạo ra các chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS.

Chúng tôi sử dụng các hợp chất hữu cơ có khối lượng phân tử lớn và nhiệt độ sôi cao để làm chất hoạt động bề mặt là Trioctylphosphine Oxide (TOPO, $C_{24}H_{51}OP$, 90%) và Hexadecylamine (HDA,$C_{16}H_{35}N$) và Trioctylphosphine (TOP, $C_{24}H_{51}P$, 90%). Quy trình chế tạo gồm có hai giai đoạn: đầu tiên là chế tạo các chấm lượng tử CdSe từ ion Cd^{2+} và Se^{2-} được gọi là lõi (core), sau đó chế tạo lớp vỏ (shell) ZnS từ ion Zn^{2+} và S^{2-} để bọc chấm lượng tử này lại, nhằm bảo vệ các phát xạ liên quan đến dịch chuyển nội tại của các chấm lượng tử lõi.

Để cung cấp ion Cd^{2+} chúng tôi sử dụng muối Cadimi Axetat $Cd(CH_3COO)_2.2H_2O$, và Selen bột dùng để cung cấp ion Se^{2-}.

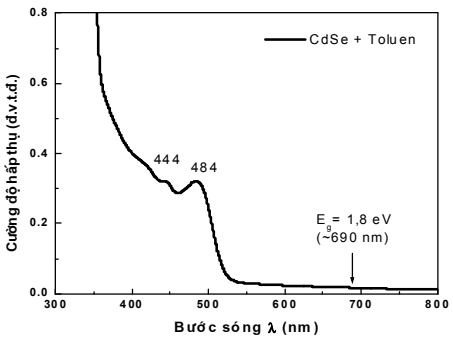
Để chế tạo lớp vỏ ZnS, chúng tôi dùng muối kẽm axetat $Zn(CH_3COO)_2.2H_2O$ để cung cấp ion Zn^{2+} và lưu huỳnh lỏng (thioacetamid) để cung cấp ion S^{2-}.

Sau khi đã chế tạo được các chấm lượng tử CdSe trong TOPO và HDA hoặc phân tán trong TOPO + HDA + toluen, chúng tôi lại tiếp tục đem mẫu các chấm lượng tử này đi ly tâm với methanol để được mẫu các chấm lượng tử dưới dạng bột huỳnh quang.

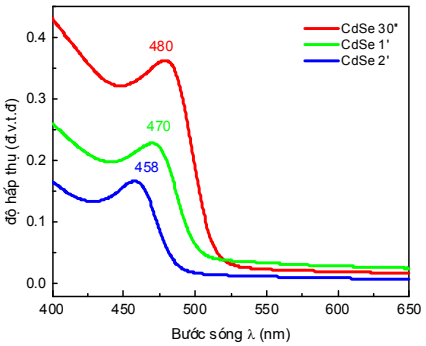
3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Sau khi tiến hành chế tạo bằng phương pháp đã trình bày, chúng tôi thu được các chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS có cấu trúc lõi/vỏ. Các chấm lượng tử này được phân tán trong toluen để tránh sự đóng rắn của TOPO và HDA và cũng để nghiên cứu các tính chất quang của nó. Chương này sẽ trình bày các tính chất quang phổ của các chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS, từ đó đưa ra các kết luận về ảnh hưởng của hiệu ứng giam giữ lượng tử cũng như ảnh hưởng của chiều dày lớp vỏ lên tính chất quang của các chấm lượng tử CdSe.

3.1. Phổ hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe



Để nghiên cứu được ảnh hưởng của chiều dày lớp vỏ lên tính chất quang của chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS, đầu tiên chúng ta hay cùng nghiên cứu tính chất quang của chấm lượng tử CdSe thể hiện qua phổ hấp thụ. Hình 3.1 là phổ hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe được phân tán trong dung dịch toluen, được đo trong khoảng bước sóng từ 300nm đến 800 nm.



Hình 3.1. Phổ hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe

Trên phổ hấp thụ, chúng ta có thể quan sát thấy đỉnh hấp thụ đầu tiên ở bước sóng cỡ 484 nm (tương ứng với năng lượng là ~ 2,562 eV. Trên hình cũng biểu diễn bằng mũi tên vị trí hấp thụ của CdSe khối ở bước sóng ~ 690 nm (tương ứng với độ rộng vùng cấm là 1,8 eV). Độ dịch đỉnh hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe về phía các bước sóng ngắn (dịch xanh, blue - shift) so với bán dẫn CdSe

khối là rất đáng kể ($\Delta\lambda$ = 206 nm tương ứng với năng lượng ~ 0,762 eV) thể hiện hiệu ứng giam giữ lượng tử trong các chấm lượng tử này là mạnh, độ rộng vùng cấm hiệu dụng của các chấm lượng tử CdSe chế tạo được bị mở rộng đáng kể so với vùng cấm của CdSe khối.

Hình 3.2 Phổ hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe với thời gian nuôi khác nhau

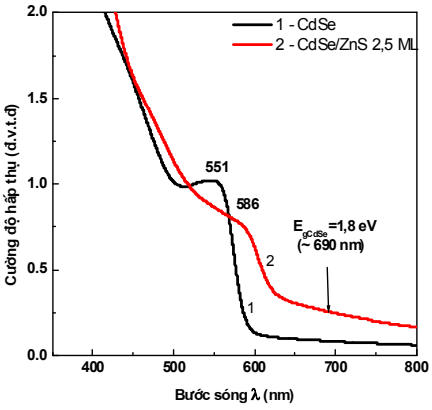
Kích thước của các chấm lượng tử chế tạo từ thực nghiệm phụ thuộc vào rất nhiều thông số như nhiệt độ phản ứng, thời gian phản ứng, tỷ lệ của các tiền chất như Cd/Se, TOPO/HDA. Qua phổ hấp thụ chúng ta có thể thấy rất rõ, tương ứng với thời gian nuôi chấm lượng tử là 30'', 1 phút và 2 phút thì có các đỉnh phổ hấp thụ là 480nm, 470 nm và 458nm. Khi thời gian nuôi càng ngắn ta thấy sự dịch chuyển về bước sóng ngắn càng nhiều hơn tương ứng với năng lượng lớn hơn hay khi đó kích thước của chấm càng nhỏ.

Khi thời gian nuôi càng dài cũng có nghĩa là kích thước của các chấm lượng tử tăng lên thì đỉnh hấp thụ càng dịch ít về phía bước sóng xanh và càng gần với bán dẫn khối hơn. Các kết quả phân tích phổ hấp thụ trên cho chúng ta khẳng định vai trò của hiệu ứng giam giữ lượng tử lên phổ hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe. Đó là sự dịch đỉnh phổ hấp thụ về phía bước sóng ngắn. Và khi kích thước của các QDs càng nhỏ thì sự dịch đỉnh phổ hấp thụ diễn ra càng mạnh.

3.2. Phổ hấp thụ của chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS

Để thấy rõ được sự thay đổi tính chất quang của chấm lượng tử CdSe khi trước và sau khi bọc vỏ, chúng tôi tiến hành đo phổ hấp thụ quang học của chấm lượng tử CdSe đã bọc một lớp vỏ ZnS, ở đây lớp vỏ có chiều dày là 2,5 đơn lớp.

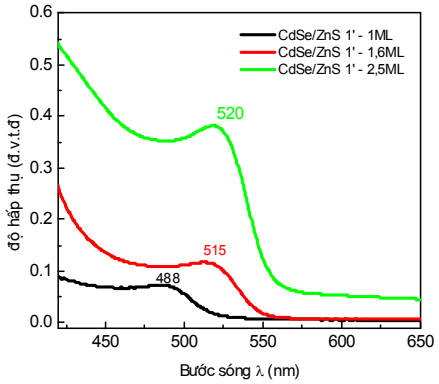
Từ phổ hấp thụ trên hình 3.3 có thể quan sát thấy đỉnh hấp thụ thứ nhất của các mẫu CdSe và của các mẫu CdSe/ZnS tại các bước sóng 551 nm (tương ứng với năng lượng ~ 2,25 eV) và 586 nm (tương ứng với năng lượng ~ 2,12 eV). Đây là những đỉnh hấp thụ cơ bản của chấm lượng tử CdSe, tương ứng với các dịch chuyển từ mức $1S_{3/2}$ đến mức $1s_e$. Lớp vỏ ZnS không làm ảnh hưởng đến dịch chuyển hấp thụ nội tại của chấm lượng tử CdSe, như quan sát trên phổ hấp thụ. Có thể vì ở dạng tinh thể khối, ZnS có bề rộng vùng cấm lớn hơn hẳn so với bề rộng vùng cấm của CdSe (E_{gZnS} = 3,6 eV so với E_{gCdSe} = 1,8 eV)



Hình 3.3. Phổ hấp thụ của chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS

Quan sát trên hình 3.3 có thể thấy bờ hấp thụ của các mẫu CdSe sau khi bọc ZnS bị dịch chuyển về phía các bước sóng dài hơn so với mẫu CdSe trước khi bọc (đỉnh hấp thụ thứ nhất của CdSe sau khi bọc 2,5 ML ZnS dịch ~ 0,13 eV so với CdSe trước khi bọc). Hiện tượng dịch đỏ (Red shift) của vị trí đỉnh phổ hấp thụ thứ nhất mà chúng ta quan sát được ở đây sau khi lõi CdSe được bọc bởi lớp vỏ ZnS được giải thích là do sự xuyên hầm cục bộ hoặc là rò rỉ của các điện tử từ lõi CdSe xuyên vào lớp tinh thể mạng ZnS vỏ.

Hình 3.4 là phổ hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe đã bọc lớp vỏ ZnS. Các chấm lượng tử này có lõi CdSe được nuôi trong cùng một điều kiện, cùng nuôi trong khoảng thời gian là 1phút, kích thước của các chấm lượng tử lõi là khá đồng đều. Vì vậy mà những khác biệt thể hiện ở trên phổ hấp thụ hình 3.4 chính là những tính chất quang khác nhau do lớp vỏ ZnS có chiều dày khác nhau mang lại.



Hình 3.4. Phổ hấp thụ của CdSe/ZnS

Quan sát ở trên hình 3.4, ta có thể rằng với những chiều dày vỏ khác nhau thì lại có những đỉnh phổ hấp thụ riêng biệt. Tương ứng với chiều dày lớp vỏ là 1ML; 1,6ML và 2,5ML thì đỉnh phổ hấp thụ thứ nhất là 488nm, 515nm và 520nm. Và các đỉnh hấp thụ này được quy cho là hấp thụ của chấm lượng tử CdSe. Như vậy so với CdSe 1 phút trước khi bọc (trên hình 3.2), phổ hấp thụ của các chấm lượng tử CdSe đã được bọc lớp vỏ ZnS dịch về phía các bước sóng đỏ độ dịch đỏ quan sát thấy có giá trị càng lớn với các chấm lượng tử CdSe có lớp vỏ ZnS càng dày. So với CdSe lõi độ dịch đỏ của CdSe bọc 1 ML, 1,6 ML và 2,5 ML tương ứng là là 18 nm, 45 nm, 50 nm tương ứng với năng lượng 0,1 eV, 0,24 eV và 0,26. Ta vẫn có thể thấy rất rõ đỉnh hấp thụ thứ nhất của chấm lượng tử CdSe, điều đó có nghĩa là dù lớp vỏ có chiều dày khác nhau nhưng lớp vỏ ZnS vẫn bảo toàn được những dịch chuyển nội tại của chấm lượng tử CdSe.

4. KẾT LUẬN

Sau một thời gian nghiên cứu, đề tài giới thiệu được một số kết quả sau:

1, Giới thiệu những tính chất ưu việt của tinh thể nano hơn so với vật liệu khối và đã nghiên cứu cụ thể về các chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS có cấu trúc lõi/vỏ.

2, Đã đưa ra phương pháp chế tạo chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS bằng phương pháp thực hiện trong phòng thí nghiệm.

3, Bước đầu tiến hành đo phổ hấp thụ để nghiên cứu các tính chất quang của các chấm lượng tử CdSe và CdSe/ZnS.